Idősorok és többdimenziós statisztika vizsga, 2020.01.08., megoldás-vázlatokkal

4. Az ARCH modellek a pénzügyekben, például részvények napi hozamának modellezésénél hasznos, hiszen itt jellemző, hogy bár az egymás utáni napok korrelálatlanok, de a négyzetük már korrelált.

5. A támasz vektorok azok a megfigyelések, amik a szeparáló hipersíkokra, vagy azok rossz oldalára esnek. Az a szerepük, hogy a klasszifikáció csak rajtuk múlik (a többi, jó oldalon levő pont nem járul hozzá a költségekhez).

6. A lényeg az, hogy $\mathrm{cov}(X_s, X_t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t - X_s + X_s) = \mathrm{cov}(X_s, X_s) = s$, ha $s < t$ mert X_s és $X_t - X_s$ definíció szerint függetlenek.

12. A kihalás valószínűsége a $G(x) = x$ egyenlet legkisebb gyöke. Mivel most $G(x) = p + (1-p)x^2$, az egyenlet kisebbik gyöke mindig 1-|1-2p|/2(1-p), ami p/(1-p) ha p<1/2 (ekkor tehát nem biztos a kihalás) és 1, ha $p \geq 1/2$.

13. 0 lesz a feltételes várható érték, mert egyenletes eloszlásunk van minden Y-ra, a 0-ra szimmetrikus intervallumon.

16. A kicsi p-érték miatt a nullhipotézist elutasítjuk (H_0: fehér zaj a vizsgált folyamat, amit AR(1) szimulációjával kaptunk) - azaz ekkora mintaelemszámnál már az $\alpha = 0,2$ kimutatható (ezt igazolja az ábra is: az els? két autkorreláció szignifikánsan eltér 0-tól)

Az alábbi kérdéseket külön lapon dolgozza ki!

(1) Definiálja Markov láncokra az átmenetvalószínűség-mátrixot. Milyen tulajdonságai vannak? *(5 p.)*

(2) Írja fel Markov láncok rekurrens állapotaira a $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűségek részsorozatainak a határértékéről tanultakat. *(5 p.)*

(3) Definiálja Markov láncok ergodikusságát. *(4 p.)*

(4) Definiálja az ARCH(1) folyamatot! Mikor használná? *(4 p.)*

(5) Definiálja a támaszvektorok fogalmát! Mi a szerepük a klasszifikációnál? *(4 p.)*

(6) Számítsa ki a $\mathrm{cov}(X(s), X(t))$értékét, ha $X(s)$ Wiener-folyamat! *(5 p.)*

(7) Definiálja az Ehrenfest-féle diffúziós modellt és vezesse le a stacionárius eloszlást. *(7 p.)*

(8) Mi az a ridge regresszió? Mikor érdemes haszálni? *(4 p.)*

(9) Ismertesse, amit a Hotelling eloszlásról tanultunk! *(5 p.)*

(10) Mi az a kommunalitás? Mi a jelentése? *(5 p.)*

(11) Vezesse le a Fisher-Bartlett tételt a kétdimenziós esetre! *(8 p.)*

(12) Számítsa ki a kihalás valószínűségét arra az esetre, ha az elágazó folyamatnál minden lépésben p valószínűséggel 0, $1-p$ valószínűséggel pedig két utód születik (és a folyamatra $X_0 = 1$). *(6 p.)*

(13) Egy (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $0 < x, 0 < y, x + y < 1$ háromszögön és annak az y tengelyre vett tükörképén. Adjuk meg az $E(X|Y)$ feltételes várható értéket! *(5 p.)*

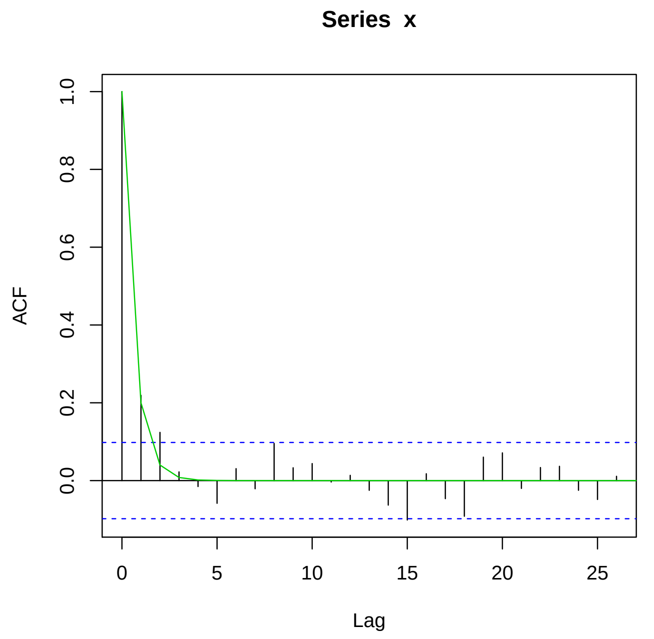
(14) Vezesse le az AR(p) folyamatnál, Gauss zaj esetére a μ várható érték maximum likelihood becslését! *(8 p.)*

(15) Vezesse le az MA(1) folyamat spektrálsűrűségfüggvényét! *(6 p.)*

(16) Értelmezze a következő R-es programrészleteket és a kapott eredményeket! *(9 p.)*

```
n=400;  x=rep(0,times=n); a=0.20
x[1]=rnorm(1)
for (i in 2:n)
x[i]=a*x[i-1]+(1-a^2)*rnorm(1)
acf(x); lines(c(0:40),a^c(0:40),col=3)
ar(x, aic = TRUE, order.max = NULL,
method = c("yule-walker"))
bt=Box.test(x, lag = 10, type = c("Box-Pierce"), fitdf = 0)
bt
```

Az eredmény: Box-Pierce test data: x X-squared = 32.427, df = 10, p-value = 0.0003398 és a következő ábra:



Név: