Valószínűségszámítás 1, 2. minta zárthelyi dolgozat, 2022 ősz

(1) Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, sűrűségfüggvényük:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}; & x > 2; \\ 0; & x \leq 2. \end{cases}$$

Konvergens-e valamilyen értelemben az $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ valószínűségi változókból álló sorozat, és ha igen, mi a limesze?

(2) Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember jövedelme (ezer forintban számolva) 500 várható értékű és 50 szórású valószínűségi változó (ez mindenkinél azonos eloszlás). Függetlenül kiválasztva 100 embert, mennyi a valószínűsége, hogy az átlagos jövedelmük több 510 ezer forintnál? Adjunk közelítést erre a valószínűségre, illetve adjunk felső becslést is a Csebisev-egyenlőtlenség alapján.

(3) Tegyük fel, hogy az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \mathbb{I}(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1) \cdot (x + y) \cdot c,$$

ahol c megfelelő pozitív szám.

a) Határozzuk meg c értékét.

b) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

c) $P(X + Y < 1) =?$

(4) Tegyük fel, hogy egy 1000 km-es sivatagi autós túrára indultunk egy pótkerékkel. Sajnos az utak nagyon rosszak, így itt az egyes kerekek élettartama független exponenciális eloszlásúnak tekinthető, de csupán 1000 km várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy célba tudunk érni külső segítség nélkül? (A kereket ki tudjuk cserélni szükség esetén, de javítani nem tudjuk.)

(5) Legyen X sűrűségfüggvénye $2x$ ha $0 < x < 1$, Y pedig egyenletes eloszlás a $(0; 1)$ intervallumon és tegyük fel, hogy függetlenek. Adjuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!