Matematikai statisztika

Informatika alapszak, "B" spec.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: zempleni.elte.hu

E-mail: andras.zempleni@ttk.elte.hu

Szoba: D 3-310

3. stat. előadás

Standard hiba

Def.: **Standard hiba.** A becslés standard hibája a becslés szórása (jele: s.e., az angol standard error megnevezésből).

- Példa: $s.e.(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Ha σ ismeretlen, akkor becsüljük: $\widehat{s.e.}(\overline{X}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
- Megj.: A becslés nem torzítatlan! (Csak aszimptotikusan)
- Alkalmazás: a becslési hiba behatárolható a segítségével (ld. Csebisev-egyenlőtlenség)
- Általában ennél pontosabb közelítés is adható

Intervallumbecslések, példák normális elo. mintára

Def.: **Konfidenciaintervallum.** Olyan intervallum, mely legalább $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazza a paramétert minden ϑ értékre.
Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ i.i.d. minta, $\alpha > 0$ "kicsi" valós szám.

Kétoldali $(1-\alpha)$-megbízhatóságú konfidenciaintervallumok:

- m-re
  - ha σ ismert, akkor $\boxed{\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
  - ha σ ismeretlen, akkor $\overline{X} \pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n^*}{\sqrt{n}}$
- σ^2-re: $\left[\frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \right]$

Egyoldali (alsó) $(1-\alpha)$-megbízhatóságú konfidenciaintervallumok:

- m-re
  - ha σ ismert, akkor $\left(-\infty , \overline{X} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
  - ha σ ismeretlen, akkor $\left(-\infty , \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha} \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \right)$
- σ^2-re: $\left(0 , \frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}} \right)$

Hipotézisvizsgálat

- **Hipotézis**: egy állítás, aminek igazságát vizsgálni szeretnénk. Egy hipotézist vagy elfogadunk, vagy elutasítunk/elvetünk.
- A paraméterteret diszjunkt részekre bontjuk: $\Theta = \Theta_0 \cup^* \Theta_1$
- A hipotézisvizsgálati alapfeladat (absztraktul, a gyakorlatban konkretizálni szoktuk)

  $H_0: \ \vartheta \in \Theta_0$ nullhipotézis

  $H_1: \ \vartheta \in \Theta_1$ ellenhipotézis vagy alternatív hipotézis
- A nullhipotézis esetén az elfogadás helyett helyesebb azt mondani, hogy nem tudjuk elvetni. Az okokról később.
- A H_0 hipotézisnek azon állítást szokás választani,
  - ami sok éves tapasztalatnak felel meg
  - amit "remélünk", hogy teljesül
  - aminek az elutasítása, gyakran negatív következményekkel jár (büntetés, bírság, riasztás stb.)

Hipotézisvizsgálati alapfogalmak

Hogyan döntsünk? Vajon H_0 igaz, vagy H_1? $\rightarrow$ jó lenne valamilyen matematikai eljárás

- Statisztikai próba vagy röviden **próba**: az a módszer/eljárás, amely során a minta segítségével döntést hozunk a hipotézis(ek)ről.
- **Paraméteres próba**: Olyan próba, amely során a feladatban lévő ismeretlen eloszlás jellege ismert, és a nullhipotézis az eloszlás valamely paraméterére (vagy annak egy minket érdeklő függvényére) vonatkozik.

- Mintatér felbontása két diszjunkt részre: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_e \cup^* \mathcal{X}_k$
- $\mathcal{X}_k$: **kritikus tartomány** – azon $\mathbf{x}$ megfigyelések halmaza, amikre *elutasítjuk* a nullhipotézist
- $\mathcal{X}_e$: **elfogadási tartomány** – azon $\mathbf{x}$ megfigyelések halmaza, amikre *elfogadjuk* a nullhipotézist

Hipotézisvizsgálati alapfogalmak II

- Döntési mátrix hipotézisvizsgálat esetén:

Döntés / "Valóság"	H_0-t elfogadjuk ($\mathcal{X}_e$)	H_0-t elutasítjuk ($\mathcal{X}_k$)
H_0 teljesül (Θ_0)	helyes döntés	elsőfajú hiba
H_0 nem teljesül (Θ_1)	másodfajú hiba	helyes döntés

- **Elsőfajú hiba** (type I error): a nullhipotézist elvetettük, de nem szabadott volna, mert a H_0-beli állítás igaz
  Valószínűsége: $\alpha(\vartheta) := P_\vartheta(\mathcal{X}_k)$, ahol $\vartheta \in \Theta_0$
  További szokásos jelölések: $\alpha(\vartheta) = P_{\vartheta\in\Theta_0}(\mathcal{X}_k) = P_{H_0}(\mathcal{X}_k) = P_0(\mathcal{X}_k)$
- **Másodfajú hiba** (type II error): a nullhipotézist elfogadtuk, de nem szabadott volna, mert a H_0-beli állítás hamis
  Valószínűsége: $\beta(\vartheta) := P_\vartheta(\mathcal{X}_e)$, ahol $\vartheta \in \Theta_1$
  További szokásos jelölések: $\beta(\vartheta) = P_{\vartheta\in\Theta_1}(\mathcal{X}_e) = P_{H_1}(\mathcal{X}_e) = P_1(\mathcal{X}_e)$
- **Erőfüggvény**: $\psi(\vartheta) := P_\vartheta(\mathcal{X}_k)$, ahol $\vartheta \in \Theta_1$

Hipotézisvizsgálati alapfogalmak III

- **Terjedelem**: $\alpha := \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \alpha(\vartheta)$
  Hosszabban: a próba pontos terjedelmének is hívják
- A hipotézisvizsgálati feladat elején rögzíteni szokás a terjedelmet, tipikusan 5%-on (esetleg más szám 1% és 10% között). Ezáltal döntésünket
  - 5%-os elsőfajú hiba valószínűsége mellett, vagy másképp:
  - 95%-os megbízhatósággal

  fogjuk meghozni.

Hipotézisvizsgálati alapfogalmak IV

- H_0 **egyszerű**, ha $|\Theta_0| = 1$ (egyelemű)
- H_0 **összetett**, ha $|\Theta_0| > 1$ (legalább kételemű)

  A továbbiakban feltesszük, hogy $\Theta \subset \mathbb{R}$ (valós paraméter esete)
- **Kétoldali próba**: $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \qquad H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$
- **Egyoldali próba**: $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \qquad H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ (vagy $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$)
- **Próbastatisztika**: Olyan alkalmas T statisztika, amely segítségével a kritikus tartományt meghatározzuk.
  - Az alábbi alakú kritikus tartományok közül választjuk ki a H_1-nek megfelelőt:

    $$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} \in \mathcal{X} : \ T(\mathrm{x}) > c\} \quad \text{(egyoldali próbánál)}$$
    $$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} \in \mathcal{X} : \ T(\mathrm{x}) < c\} \quad \text{(egyoldali próbánál)}$$
    $$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} \in \mathcal{X} : \ |T(\mathrm{x})| > c\} \quad \text{(kétoldali próbánál)}$$
  - c neve: **kritikus érték**, ami jellemzően függ a próba terjedelmétől, ezért c_α-val jelöljük. Ez általában arra utal, hogy c_α a $T(\mathrm{X})$ valószínűségi változó α-kvantilise.
  - A próba meghatározása: előre rögzített α terjedelemhez azt a c_α értéket keressük, amire a próba terjedelme éppen α:

    $$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta(T(\mathrm{X}) > c_\alpha) = \alpha.$$

A hipotézisvizsgálat menete I.

- A terjedelem (α) lefixálása, ami jellemzően 1% és 10% közötti, tipikusan 5%
  Megbízhatóság$= 1 - \alpha$, általában %-osan írjuk
- Nullhipotézis (H_0) felírása – sokévi, megszokott, elvárt értékeknek megfelelő paramétertartomány
- Alternatív hipotézis (H_1) felírása – a feladat alapján bennünket érdeklő kérdésnek megfelelő paramétertartomány
- A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása – feltételek ellenőrzése
- Próbastatisztika kiszámítása
- Kritikus érték kiszámítása, kritikus tartomány ($\mathcal{X}_k$) megállapítása
- Döntés:
  - $x \in \mathcal{X}_k \rightarrow$ **erős döntés**, H_1-et elfogadjuk, H_0-t elvetjük/elutasítjuk
  - $x \in \mathcal{X}_e \rightarrow$ **gyenge döntés**, H_0-t nem tudjuk elutasítani

A hipotézisvizsgálat menete II.

- A terjedelem (α) lefixálása
- Nullhipotézis (H_0) felírása
- Alternatív hipotézis (H_1) felírása
- A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása
- Számítógéppel dolgozva, az előző dián lévő 6.)-7.) helyett dönthetünk az ún. *p*-érték alapján is:

$$\boxed{p\text{-érték} < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{X}_k \quad \Leftrightarrow \quad H_1\text{-et elfogadjuk}}$$

p-**érték**: az a terjedelem, amire a kritikus érték megegyezik a próbastatisztikával (másképpen: a legkisebb olyan α, amire az adott minta esetén elvetjük H_0-t)

Ha például a *p*-érték$= 0.06$, akkor 5%-os elsőfajú hiba valószínűség mellett nem tudjuk elvetni H_0-t, de 10%-os elsőfajú hiba valószínűség esetén már elvetjük H_0-t.

Ha viszont például a *p*-érték$= 0.16$, akkor a hagyományos, értelmes – 90% fölötti – megbízhatósági szinteken nem tudjuk elvetni H_0-t.

Nevezetes paraméteres próbák – áttekintés

Próbák a normális eloszlás várható értékére vonatkozóan:

- Egymintás u-próba, egymintás t-próba
- Kétmintás próbák:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">a két minta
független</td><td>a két minta
párosított</td></tr>
<tr><td>σ_1 és σ_2
ismert</td><td colspan="2">kétmintás u-próba</td><td>egymintás u-próba
a különbségekre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">σ_1 és σ_2
ismeretlen</td><td colspan="2">előzetes F-próba</td><td rowspan="3">egymintás t-próba
a különbségekre</td></tr>
<tr><td>$\sigma_1 = \sigma_2$</td><td>$\sigma_1 \neq \sigma_2$</td></tr>
<tr><td>kétmintás t-próba</td><td>Welch-próba</td></tr>
</table>

Próbák normális eloszlás szórásnégyzetére vonatkozóan:

- Egymintás próba: χ^2-próba
- Kétmintás próba: F-próba

Összefüggő (párosított) minták: X_i és Y_i ugyanahhoz, az i-edik személyhez, tárgyhoz, objektumhoz tartozó véletlen mennyiség, $i = 1, 2, \ldots$

Nevezetes paraméteres próbák I

Egymintás u-próba

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol σ ismert, m ismeretlen paraméter

Kétoldali: $H_0 : m = m_0$
$\underline{H_1 : m \neq m_0}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}) = u := \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : |u| > u_{1-\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén H_0 és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak H_1, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

Egyoldaliak:	$H_1 : m > m_0$	$H_1 : m < m_0$
Kritikus tartomány:	$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : u > u_{1-\alpha}\}$	$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : u < -u_{1-\alpha}\}$

Áttekintés

Egymintás t-próba

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m és σ ismeretlen paraméterek

Kétoldali: $H_0 : m = m_0$
$\underline{H_1 : m \neq m_0}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}) = t := \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{S_n^*} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n-1}$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : |t| > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén H_0 és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak H_1, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

Egyoldaliak: $H_1 : m > m_0$ $H_1 : m < m_0$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : t > t_{n-1,1-\alpha}\}$

$\mathcal{X}_k = \{\mathrm{x} : t < -t_{n-1,1-\alpha}\}$

Áttekintés