Valószínűségszámítás és statisztika előadás informatika BSC/B szakosoknak

2021/2022 2. félév

Zempléni András

andras.zempleni@ttk.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

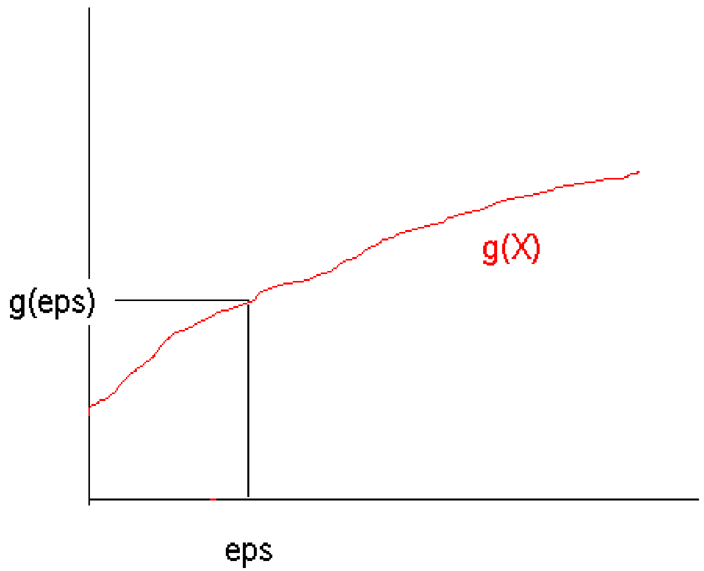
Markov-típusú egyenlőtlenségek

- Legyen $X \geq 0$ valószínűségi változó, g: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ monoton növő. Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$-ra: $P(X \geq \varepsilon) \leq E(g(X))/g(\varepsilon)$.
- Bizonyítás.

$E(g(X)) \geq g(\varepsilon)P(X \geq \varepsilon)$

mert $X \geq \varepsilon$ eseményen

$g(X)) \geq g(\varepsilon)$



Alkalmazások

- $g(x)=x$: Ha $X \geq 0$ valószínűségi változó, akkor $P(X \geq \varepsilon) \leq E(X)/\varepsilon$ (ezt nevezik Markov egyenlőtlenségnek).
- $g(x)=x$, X helyett $(X-EX)^2$-re alkalmazva: $P((X-EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq E(X-EX)^2/\varepsilon^2$, ami egyszerűsítve $P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq D^2(X)/\varepsilon^2$ (elnevezés:Csebisev egyenlőtlenség).
- Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenségek élesek, azaz minden ε-ra megadható olyan valószínűségi változó, amelyre $P(X \geq \varepsilon)=E(X)/\varepsilon$. (Két értéket vesz fel: 0, ε).

Alkalmazások

- Az eredmények a gyakorlatban mégsem adnak kellően pontos becslést, mert a tényleges eloszlások tulajdonságait nem veszi figyelembe. Ezért, ha ismerjük az adott változó eloszlását, mindig abból adjuk meg a valószínűségek értékét.
- Példa: hányszor kell egy szabályos érmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.99 valószínűséggel ne térjen el 0.05-nél jobban 0.5-től? Csebisev egyenlőtlenségből:

  $P(|X-0.5| \geq 0.05) \leq D^2(X)/\varepsilon^2 = 400/4n \leq 0.01$ elég, amiből $n \geq 10000$ adódik. A binomiális eloszlásból adódó pontos érték: 670. Szimuláció

Nagy számok törvényei

- Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = D^2(X)$ véges ($m := E(X_i)$). Ekkor minden ε, $\delta > 0$-hoz megadható olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $P(|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - m| \geq \varepsilon) \leq \delta$.
- Bizonyítás. $E(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n = m$, és $D^2[(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n] = \sigma^2/n$. A Csebisev egyenlőtlenség miatt $P(|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2 n$, ami 0-hoz tart, azaz elég nagy n-re kisebb lesz δ-nál.
- Elnevezés: $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \rightarrow m$ sztochasztikusan (az ilyen konvergenciát bizonyító tételeket gyenge tételnek nevezzük).

Megjegyzések

- A tétel feltételei gyengíthetőek: elég, ha a független, azonos eloszlású változók várható értéke véges, sőt a függetlenség is gyengíthető.
- Az állítás is erősíthető: 1 valószínűségű konvergencia is bizonyítható (ez azt jelenti, hogy

$$P\{\omega: (X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m\} = 1.$$

- Ha $\Omega=[0,1]$ és P(A) az A "hossza", akkor az 1 valószínűségű konvergencia lényegében a szokásos pontonkénti konvergencia. Ez nem következik a sztochasztikus konvergenciából:

  Legyen pl. $X_{2^n+k}(z)=1$, ha $k/2^n<z<(k+1)/2^n$ és 0 különben.
  Ekkor $X_n \to 0$ sztochasztikusan, de $P\{z: X_n \to 0\} = 0$

Bernoulli tétele

- A nagy számok törvényének legelső verzióját még Bernoulli bizonyította, indikátorváltozókra: eszerint azonos körülmények között elvégzett független kísérleteknél tetszőleges esemény relatív gyakorisága tart az esemény valószínűségéhez. (Az előző speciális esete: X indikátorváltozó.)

Centrális határeloszlás tétel

- Legyenek X_1 , X_2 ,…, X_n ,... független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = D^2(X)$ véges ($m := E(X_i)$). Tekintsük a standardizált összegüket:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

Ekkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

A nem azonos eloszlású eset

- Ekkor – a nagy számok törvényénél már látott okok miatt – erősebb feltételek kellenek.
- A legegyszerűbb eset: ha X_1, X_2,..., X_n,... független, egyenletesen korlátos valószínűségi változók (ekkor $\sigma_i^2=D^2(X_i)$ véges, $m_i:=E(X_i)$), akkor a standardizált összegük:

$$Z_n := \frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{\sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2}}$$

Ha $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2\to\infty$ akkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(Z_n < z\right)\to\Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Általánosítások

- Ha nem korlátosak a tagok, további feltételekre (pl. magasabb momentumok létezése, hasonló nagyságrendű összeadandók) van szükség.
- Gyenge összefüggőség esetére is általánosítható a tétel.