Valószínűségszámítás és statisztika előadás informatika BSC/B szakosoknak

2021/2022 2. félév

Zempléni András

andras.zempleni@ttk.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Az eloszlásfüggvény

- Legyen $F_X(z):=P(X<z)$
- Az $F_X(z)$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.
- Tulajdonságai:
  - $0 \leq F_X(z) \leq 1$
  - $F_X(z)$ monoton növő
  - $\lim_{z\rightarrow\infty} F_X(z)=1$, $\lim_{z\rightarrow-\infty} F_X(z)=0$
  - $F_X(z)$ balról folytonos.

Példák

- Tetszőleges 1-4 tulajdonságú F-hez létezik X, aminek F az eloszlásfügvénye (pl. Ω=***R*** , P([a,b))=F(b)-F(a), X az identitásfüggvény
- A c pontban elfajult eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(z)=\begin{cases}0, \text{ha } z \le c\\ 1, \text{ha } z > c\end{cases}$$

- Az indikátorváltozó eloszlásfüggvénye

$$F(z)=\begin{cases}0, \text{ha } z \le 0\\ 1-p, \text{ha } 0 < z \le 1\\ 1, \text{ha } z > 1\end{cases}$$

Folytonos eloszlások

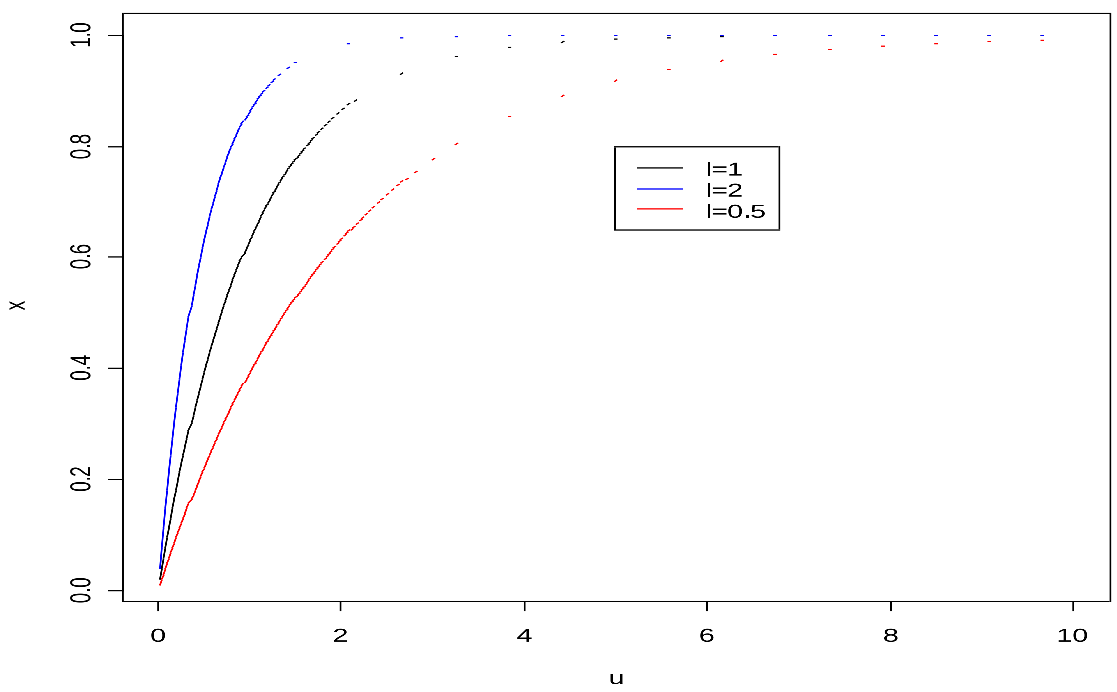
- Definíció. X folytonos eloszlású, ha eloszlásfüggvénye folytonos.
- Példa: egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon:

$$F(z)=\begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{z-a}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 1, \text{ha } z > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, \text{ha } 0 < z \end{cases}$$

ahol λ>0 paraméter



Valószínűségek kiszámítása

- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(X=a) = F(a+0) - F(a)$, azaz ha F folytonos, minden egyes pont 0 valószínűségű.
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a+0)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b+0) - F(a)$

Abszolút folytonos eloszlások

- Ha létezik f, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

  akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f ***sűrűségfüggvénnyel***.
- f tulajdonságai: f≥0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

- Ez elég is: minden ilyen f integrálfüggvénye eloszlásfüggvény.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

- Létezéséhez szükséges, hogy F folytonos legyen.
- Ha F abszolút folytonos, akor F’=f, ahol F deriválható.
- f nem egyértelmű (pl. véges sok pontban tetszőleges értéket adhatunk neki), ezért a legegyszerűbb, szakaszonként folytonos változatot választjuk.
- Szemléletes jelentése:

  $$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt \approx f(a)(b-a)$$

  azaz rövid intervallumokra a valószínűség közelíthető a sűrűségfüggvény értékének és az intervallum hosszának a szorzatával.

Példák

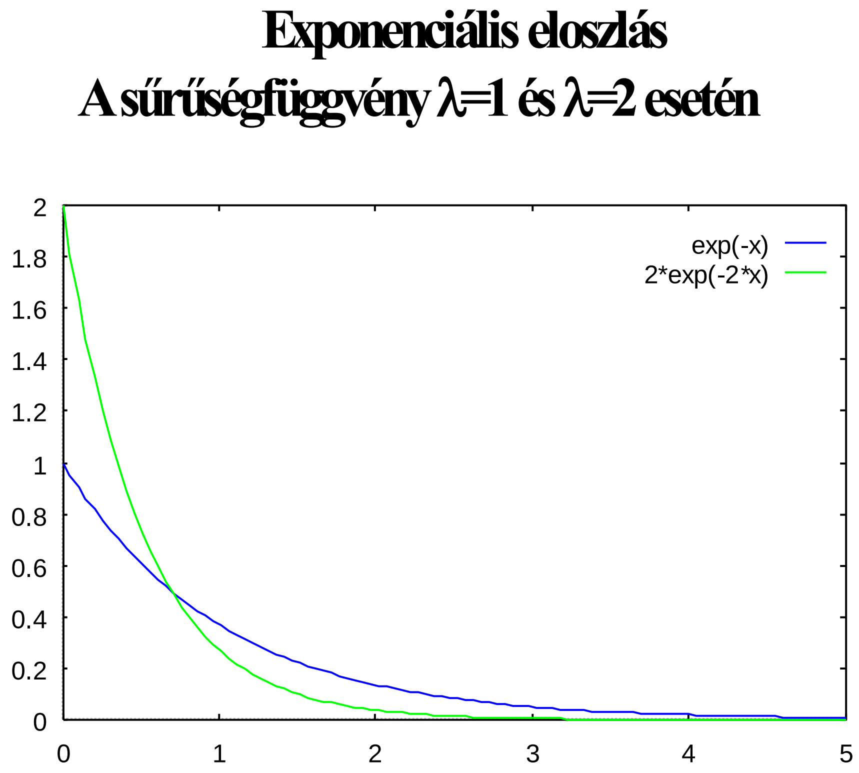
- Egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon

$$f(z)=\begin{cases} 0,\,\text{ha } z\le a \\ \dfrac{1}{b-a},\,\text{ha } a<z\le b \\ 0,\,\text{ha } z>b \end{cases}$$

- Exponenciális eloszlás

$$f(t)=\begin{cases} 0,\,\text{ha } t\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t},\,\text{ha } 0<t \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás



Standard normális eloszlás

- A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

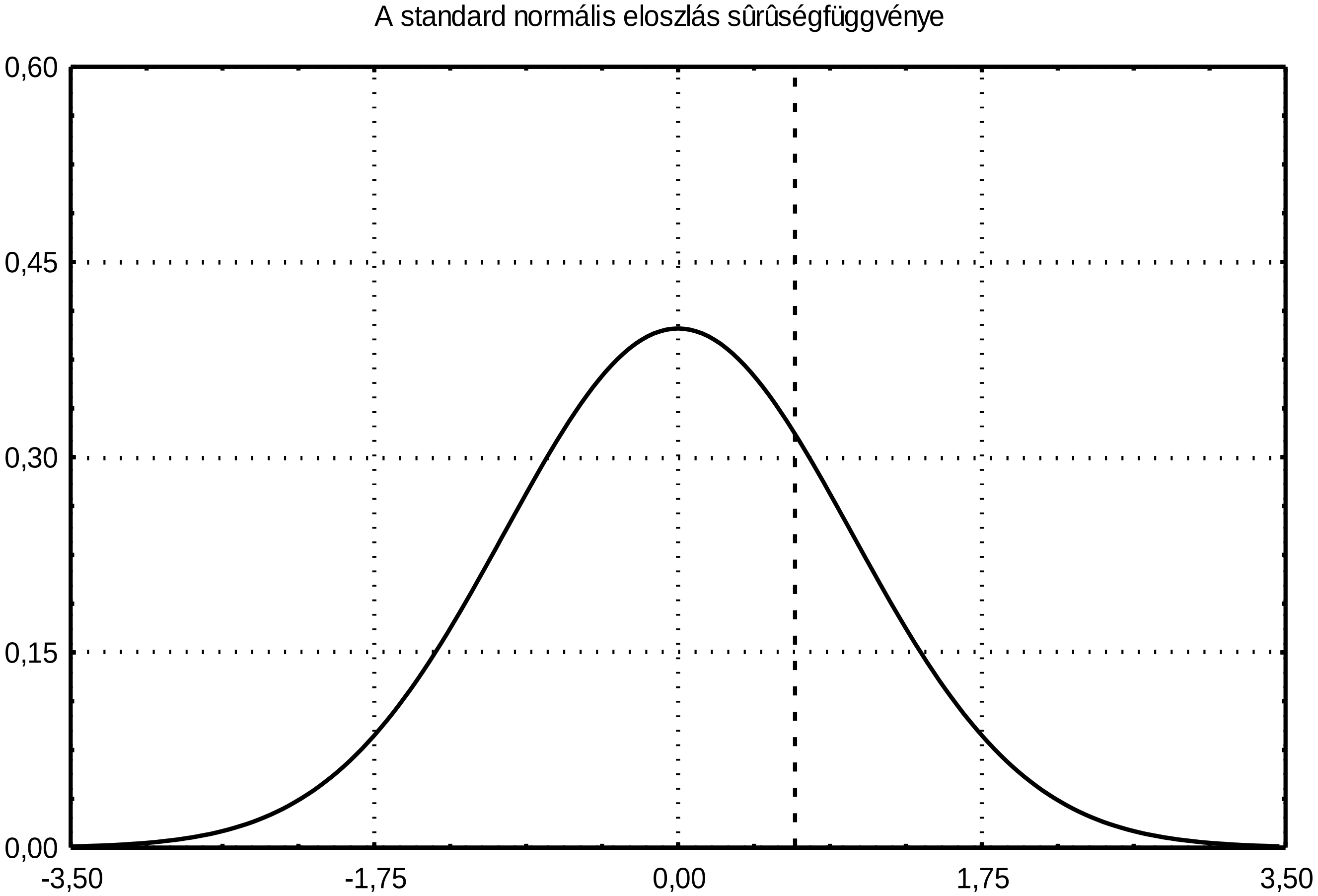
- Valóban sűrűségfüggvény, mert f>0 és

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}dxdy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}d\varphi dr=\int_{0}^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=1$$

a polárkoordinátás helyettesítésből

A standard normális sűrűségfüggvény



g(X) eloszlása

- Legyen g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ függvény. Ekkor g(X) is valószínűségi változó.
- Abból, hogy X eloszlása abszolút folytonos, nem következik még g(X) eloszlásának folytonossága sem: pl. g(x)=c esetén g(X) elfajult eloszlású.

Példák

$F_{aX+b}(z) = F_X((z-b)/a)$, ha $a>0$ és

$F_{aX+b}(z) = 1-F_X((z-b)/a)$, ha $a<0$.

Ebből adódik, hogy ha X abszolút folytonos, és $g(z)=az+b$, akkor $g(X)$ sűrűségfüggvénye

$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$.

Általános eredmény: ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, $g'\neq 0$, akkor

$$f_{g(X)}(z) = \frac{f_X(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|}$$