## Valószínűségszámítás és statisztika előadás informatika BSC/B szakosoknak

2021/2022 2. félév
Zempléni András
andras.zempleni@ttk.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

1

## 1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Valószínűségszámítás tárgya
- Történet
- Alapfogalmak
- Valószínűségek kiszámítása

2

## Irodalom/1: Val.szám

- Hozzáférhető elektronikus jegyzetek
  Arató-Prokaj-Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (saját honlapomon)
  Balázs M., Tóth B.: Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak. Elérési helye: http://math.bme.hu/~balazs/vsz1jzetb-t.pdf
  Tankönyvek:
  - Prékopa: Valószínűségelmélet
  - Rényi: Valószínűségszámítás
  - S. Ross: A First Course in Probability
- Példatár:
  - Bognárné-Mogyoródi-Prékopa-Rényi-Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény

3

## Irodalom/2: mat.stat.

- Bolla-Krámli: Statisztikai következtetések elmélete. Tankönyv
- Fazekas (szerk.): Bevezetés a matematikai statisztikába. Tankönyv
- Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár.
- Pröhle-Zempléni: Statistical Problem Solving in R. http://zempleni.elte.hu/Stat_R_Prohle_Zempleni R programnyelv bevezető, a benne szereplő statisztikai témák erősen átfednek az előadással

4

## Számonkérés

- Összevont jegy: évfolyam zh-k alapján
  - Két kis zh: 5. és 9. héten
  - Harmadik (nagy) zh: vizsgaidőszak első hetében
- Részletes információk: https://kovacsam.web.elte.hu/index_infovszstat
- Vizsgapontok szerezhetőek az előadáson, villámkérdések megválaszolásával is
- Online időszakban: heti előadás-kvízek
- Előadások anyaga: zempleni.elte.hu/valsz_22.html

5

## Cél

- A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapjainak ismertetése
- Feladatmegoldási, alkalmazási készség kialakítása (gyakorlaton)
- Alkalmazási lehetőségek bemutatása (véletlen számok, hipotézisvizsgálat, regresszió stb.)

6

## Valószínűségszámítás helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert precízen megfogalmazott axiómákra épül.
- Gyakorlati alkalmazásai: statisztikai következtetések levonása (pl.: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej jött ki, akkor 99.9% valószínűséggel állítható, hogy az érme nem szabályos).

7

## Történeti áttekintés 1.

- Első ismert feladat 1494-ből: játék idő előtti abbahagyása esetén hogyan osztozzanak? Helyes megoldás több, mint 100 évvel későbbi: Pascal (1623 – 1662), Fermat (1601 – 1665)
- Könnyen adható szimulációs megoldás (precíz számítás a gyakorlaton)
- Cardano (1540 körül) könyvet írt a kockajátékokhoz kapcsolódó valószínűségszámítási kérdésekről

8

## Történeti áttekintés 2.

- de Mére lovag kérdése:
  - Egy kockával négyszer dobva előnyös arra fogadni, hogy lesz hatos, de 2 kockával 24-szer dobva már nem előnyös arra fogadni, hogy lesz (6,6) a dobások között.
  - Megoldás: Pascal, Fermat (1654)
- Huygens (1657): Az első valószínűségszámítás könyv
- de Witt, Halley (1671): életjáradék-számítás valószínűségi alapon

9

## Történeti áttekintés 3.

- Jacob Bernoulli (1713): Ars Conjectandi (nagy számok törvénye)
- XVIII-XIX. sz: Moivre, Bayes, Gauss, Poisson
- Buffon: geometriai valószínűség bevezetése – paradoxonok
- XIX.sz: Csebisev, Markov, Ljapunov

10

## Történeti áttekintés 4.

- Axiomatizálás: Kolmogorov (1933)
- Modern alkalmazások:
  - Információelmélet (Shannon)
  - Játékelmélet (Neumann)
  - Matematikai statisztika (Fisher)
  - Sztochasztikus folyamatok
- Magyar tudósok:
  - Jordán Károly (1871-1959)
  - Rényi Alfréd (1921-1970)

11

## Véletlen kísérletek

- Olyan kísérletekkel foglalkozunk, amelyek eredményét nem tudjuk előre biztosan megmondani (kockadobás, lottóhúzás, meteorológiai, tőzsdei események stb).
- Az összes lehetséges eredmény: eseménytér.

12

## Alapfogalmak

- Eseménytér
  - Kísérlet egy lehetséges kimenetele: elemi esemény, jelölése $\omega$.
  - Elemi események összessége: eseménytér, $\Omega$ .
  - $\Omega$ részhalmazai: események ($A,B,C,\ldots$).
  - Esemény akkor következik be, ha az őt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

13

## Példák

- Kockadobás: $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$. Ha az $A$ esemény: páros számot dobtunk, akkor $A=\{2,4,6\}$.
- Érmét kétszer feldobva: $\Omega=\{II,IF,FI,FF\}$ $A=\{II,IF\}$ az az esemény, hogy az első dobás írás.
- Érmét addig dobunk, míg fejet nem kapunk. $\Omega=\{F,IF,IIF,\ldots,\omega_\infty\}$ ahol $\omega_\infty=III\ldots$ (azaz minden dobás írás)

14

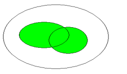
## Események

- Esemény: $\Omega$ részhalmaza
- Speciális események:
  - $\Omega$ (biztos esemény)
  - $\varnothing$ (lehetetlen esemény)
- Az események összessége: $\mathcal{A}$ (halmazrendszer $\Omega$ részhalmazaiból)
- Műveletek eseményekkel: szokásos logikai műveletek = halmazműveletek

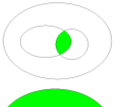
15

## Műveletek eseményekkel

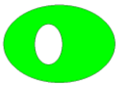
- $A\cup B$: vagy $A$ vagy $B$ bekövetkezik (az is lehet, hogy mindkettő)



- $A\cap B$: $A$ és $B$ is bekövetkezik



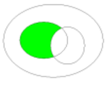
- $A$ esemény ellentettje: $\overline{A}$



16

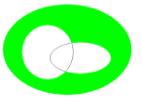
## Tulajdonságok

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(De Morgan)



$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\Omega} = \varnothing$$

17

## Valószínűség

- Szemléletes megfelelője: *relatív gyakoriság*. Ha $n$ egymástól függetlenül, azonos körülmények között végrehajtott kísérletből az adott $A$ esemény $k$-szor következett be, akkor a relatív gyakoriság $k/n$.
- Nagy $n$-re a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik: ezt nevezzük az $A$ valószínűségének.Kocka-kísérlet

18

## A valószínűség

- Jele: $P(A)$
- A relatív gyakoriság tulajdonságaiból:
  - Nemnegatív: $P(A) \geq 0$ minden A-ra
  - Egymást kizáró eseményekre, azaz, ha
    $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    (additivitás). Az úgynevezett Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnél ezt megszámlálhatóan végtelen sok, páronként egymást kizáró eseményre is megköveteljük
  - $P(\Omega)=1$

19

## Tulajdonságok 1.

- Additivitás $n$ eseményre: ha $A_1$, $A_2$ , ..., $A_n$ páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Bizonyítás: indukcióval.

- $P(\emptyset)=0$.

Bizonyítás: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ felbontásból és az additivitásból

20

## Tulajdonságok 2.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ felbontásból és az additivitásból

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ felbontásból, az additivitásból és az előző tulajdonságból.

21

## Véges valószínűségi mező

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

Jelölés: $p_i = P(\omega_i)$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$$

az additivitásból.

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

Azaz a $p_i$ nemnegatív, 1 összegű számok meghatározzák a valószínűséget.

22

## Klasszikus valószínűségi mező

- $p_i$=1/n minden $i$-re (azonos valószínűségűek az elemi események).
- Ekkor $P(A) = \dfrac{k}{n}$ ahol $k$ az $A$ elemszáma,

  $n$ pedig az összes esetszám.
- Másképpen: $P(A)$=kedvező esetek száma/ összes esetszám.
- Ez ismerős lehet a középiskolából

23

## Visszatevéses mintavétel

- $N$ termék, melyből $M$ selejtes
- $n$ elemű minta visszatevéssel
- $A$: pontosan $k$ selejtes van a mintában

($k$=0,…,$n$) $$P(A) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

24

## Visszatevés nélküli mintavétel

- $N$ termék, melyből $M$ selejtes
- $n$ elemű minta visszatevés nélkül
- $A$: pontosan $k$ selejtes van a mintában ($k$=0,…,$n$)

$$P(A)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mintavétel

25

## Feltételes valószínűség 1.

- Az $A$ esemény valószínűségét keressük.
- Tudjuk, hogy $B$ esemény bekövetkezett.
- A relatív gyakoriságokkal: csak azokat a kísérleteket nézzük, amelyekben $B$ bekövetkezett. Ezen részsorozatban az $A$ relatív gyakorisága:

$$r_{A\cap B}/\ r_B$$

26

## Feltételes valószínűség 2.

- Megfelelője a valószínűségekre:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége (feltétel: $P(B)>0$).

- Példa: kockadobás. $A$={páros számot dobunk}
  $B$={3-nál nagyobbat dobtunk}
  $P(A|B)=2/3$.

27

## Teljes eseményrendszer

- *Definíció.* Események $A_1$, $A_2$ , …, sorozata *teljes eseményrendszer*, ha egymást páronként kizárják és egyesítésük Ω.
- Tulajdonság: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots=1$
- Legtöbbször véges sok elemből álló teljes eseményrendszereket vizsgálunk.

28

## Teljes valószínűség tétele.

- Legyen $B_1$, $B_2$ , …, pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A$ tetszőleges esemény. Ekkor

$$P(A)=P(A\,|\,B_1)P(B_1)+P(A\,|\,B_2)P(B_2)+\ldots$$

- *Bizonyítás.* $A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots$

diszjunkt tagokra bontás, tehát

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots$$

és $P(A\cap B_i)=P(A|B_i)P(B_i)$ adja a tételt.

29

## Bayes tétele

Legyen $B_1$, $B_2$ , …, pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A\in\mathcal{A}$ pozitív valószínűségű. Ekkor

$$P(B_k\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B_k)P(B_k)}{\sum P(A\,|\,B_i)P(B_i)}$$

(Visszakövetkeztetés az első lépés eredményére.)

*Bizonyítás.* A nevező éppen $P(A)$ a teljes valószínűség tétele miatt.

A számláló pedig $P(A\cap B_k)$, definíció szerint.

30