Matematikai statisztika

Informatika alapszak, "A" spec.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: `zempleni.elte.hu`

E-mail: `andras.zempleni@ttk.elte.hu`

Szoba: D 3-310

8. előadás

Nevezetes paraméteres próbák VI

χ^2**-próba** (normális eloszlás szórására)

$X_1, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m és σ ismeretlen paraméterek

Kétoldali: $H_0 : \sigma = \sigma_0$
$\underline{H_1 : \sigma \neq \sigma_0}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}) = h := \frac{(n-1)(S_n^*)^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{n-1}$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \left\{ \mathbf{x} : h < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \text{ vagy } h > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \right\}$

Egyoldali próbák esetén H_0 és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak H_1, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

Egyoldaliak:	$H_1 : \sigma > \sigma_0$	$H_1 : \sigma < \sigma_0$
Kritikus tartomány:	$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : h > \chi^2_{n-1,1-\alpha}\}$	$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : h < \chi^2_{n-1,\alpha}\}$

Áttekintés

F-próba

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
$Y_1, \ldots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független minták
ahol m_1, m_2, σ_1, σ_2 ismeretlen paraméterek

Kétoldali: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = F = \frac{(S_1^*)^2}{(S_2^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{n-1,m-1}$

Kritikus tartomány:
$\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : F < F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ vagy $F > F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén H_0 és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak H_1, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

Egyoldaliak:	$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$	$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$
Krit. tart.:	$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : F > F_{n-1,m-1,1-\alpha}\}$	$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : F < F_{n-1,m-1,\alpha}\}$

Áttekintés

A próbafüggvény

Próbafüggvény: $\varphi\colon \mathcal{X} \to [0;1] \rightsquigarrow$ ennyi valószínűséggel vetjük el a minta alapján a nullhipotézist

- $\varphi(\mathbf{x}) := I(\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \\ 0 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \end{cases}$
- A próbafüggvény is egy statisztika
- A próbafüggvény egyértelműen meghatározza a próbát, ezért gyakran a próbát magával a φ függvénnyel azonosítják
- Tipikusan $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } T(\mathbf{x}) \geq c_\alpha \\ 0 & \text{ha } T(\mathbf{x}) < c_\alpha \end{cases}$ alakú,
  ahol T egy alkalmas statisztika,
  c_α pedig a kritikus érték, amit úgy határozunk meg, hogy
  $P_{\vartheta\in\Theta_0}(\mathcal{X}_k) = E_{\vartheta\in\Theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = P_{\vartheta\in\Theta_0}(T(\mathbf{X}) \geq c_\alpha) = \alpha$ teljesüljön
- Diszkrét eloszlású minták esetén rendszerint nem lehet úgy meghatározni c_α-t, hogy a terjedelem pontosan α legyen, ezért a próbafüggvény fogalmának általánosítására, úgynevezett **véletlenítés**re (randomizálásra) van szükség ilyenkor.

A próbafüggvény

Véletlenített próbafüggvény: $\varphi \colon \mathcal{X} \to [0;1]$

- $$\varphi(\mathbf{x}) := I(\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \\ p & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_r \\ 0 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \end{cases} \text{, ahol}$$
  $\mathcal{X}_r$ neve: véletlenítési vagy "randomizálási" tartomány; $p \in [0;1]$
- Tipikusan $$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } T(\mathbf{x}) > c_\alpha \\ p_\alpha & \text{ha } T(\mathbf{x}) = c_\alpha \\ 0 & \text{ha } T(\mathbf{x}) < c_\alpha \end{cases} \text{ alakú,}$$
  ahol T egy alkalmas statisztika,
  c_α a kritikus érték és $p_\alpha \in [0;1]$, amiket úgy határozunk meg, hogy
  $E_{\vartheta \in \Theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = P_{\vartheta \in \Theta_0}(T(\mathbf{X}) > c_\alpha) + p_\alpha \cdot P_{\vartheta \in \Theta_0}(T(\mathbf{X}) = c_\alpha) = \alpha$
  teljesüljön
  Az ilyen próbafüggvénnyel végrehajtott próbát **véletlenített próbá**nak hívjuk.

Próbák tulajdonságai

- **Torzítatlan próba (legfeljebb α terjedelemmel)**:
  $P_\vartheta(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$-ra és
  $P_\vartheta(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$-re
  Megfontolás a definíció mögött: ha nem teljesül H_0, akkor a minta alapján az elvetés valószínűsége legalább annyi legyen, mintha igaz lenne H_0.
- **Konzisztens próba (α terjedelemmel)**: olyan próba, aminek α a terjedelme és a mintaméret növelésével az erőfüggvény 1-hez konvergál. Formálisan felírva:
  $P_{\vartheta \in \Theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) = \alpha$ és
  $\psi_n(\vartheta) \xrightarrow{n \to \infty} 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$-re, ahol
  ψ_n az n elemű mintához tartozó erőfüggvény
  Megj.: ha az erőfüggvény 1-hez konvergál, akkor ebből következik, hogy a másodfajú hiba valószínűsége 0-hoz tart.

Próbák tulajdonságai

- Legyenek φ_1 és φ_2 α terjedelmű próbák. A φ_1 **próba erősebb** φ_2 **próbánál**, ha φ_1 próba erőfüggvénye $\forall\vartheta \in \Theta_1$ esetén nagyobb vagy egyenlő, mint φ_2 próba erőfüggvénye
  Megj.: nem biztos, hogy két próba közül az egyik erősebb a másiknál
- **Egyenletesen legerősebb próba**: az adott hipotézisvizsgálati feladat esetén minden más α terjedelmű próbánál erősebb
  Megj.: nem biztos, hogy létezik egyenletesen legerősebb próba az adott feladatra
- Mikor létezik egyenletesen legerősebb próba? Ha létezik, akkor hogyan találjuk meg?

Legerősebb próba keresése

Ha mind H_0, mind H_1 egyszerű, akkor adott α terjedelemhez lehet legerősebb próbát találni, ezt pedig úgy hívják, hogy **valószínűség-hányados próba.**

A hipotézisek folytonos esetre (diszkrétre a sűrűségfüggvény helyett a konkrét eloszlást kell írni):

$H_0 : \; f = f_0$

$H_1 : \; f = f_1$

A próba kritikus tartománya: $\mathcal{X}_k = \left\{ \mathbf{x} : \overbrace{\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}}^{T(\mathbf{x})} > c_\alpha \right\}$

Tehát azokat az **x**-eket, amikre a $T(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$ statisztika nagy, bepakoljuk a kritikus tartományba egészen addig, míg az adott α terjedelmet el nem érjük. Diszkrét esetben ehhez általában véletlenítésre van szükség, azaz bizonyos **x**-ek esetén nem 1 vagy 0, hanem egy, e két szám közé eső (jelöljük p_α-val) valószínűséggel vetjük el a nullhipotézist.

A valószínűség-hányados próba elméleti hátterét a *Neyman-Pearson* (alap)*lemma* biztosítja.

Feladatok

E**7.)** Mutassuk meg, hogy a kétoldali, egymintás u-próba torzítatlan és konzisztens!

E**8.)** Keressünk n elemű $N(m, \sigma^2)$ független minta esetén egyenletesen legerősebb α terjedelmű próbát a
$H_0 : m = m_0$
$\underline{H_1 : m > m_0}$
hipotézisvizsgálati feladatra, ha σ ismert!
Határozzuk meg a kritikus értéket, ha a próbastatisztika
$T(\mathbf{X}) = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}$! Ez alapján kimondható a következő

Tétel: az egyoldali u-próba egyenletesen legerősebb a $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m > m_0$ hipotézisvizsgálati feladatra. ($H_1 : m < m_0$-re is)

Mintaelemszám-meghatározás

- Az u (t) próba konzisztenciájából következik, hogy minden $\vartheta \in \Theta_1$-hez és $\epsilon > 0$-hoz megadható n_0, hogy $n > n_0$-ra $\psi_n(\vartheta) > 1 - \epsilon$, azaz n elemű mintából már legalább $1 - \epsilon$ valószínűséggel észrevesszük az eltérést, ha ϑ a valódi paraméter.
- Közelítő formula az $1 - \beta$ erőfüggvény-értékhez szükséges elemszámra (egyoldali esetre):

$$n \geq \sigma^2 \frac{(u_\alpha + u_\beta)^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

- A konfidencia intervallumoknál is felmerül hasonló kérdés: hány elemű minta kell, hogy az $1 - \alpha$ megbízhatóságú intervallum hossza d legyen.
- Közelítő formula a szükséges elemszámra:

$$n \geq 4\sigma^2 \frac{(u_{\alpha/2})^2}{(d)^2}.$$

Nemparaméteres próbák

- Eddig végig feltettük a minta normalitását. Ez sokszor nem reális. Ha kiugró értékek vannak az adatsorban (vastag szélű eloszlásból származnak), akkor pl. a *t*-próba nem használható.
- Előjelpróba
    - Egymintás teszt a $P(X > m) = 1/2$ nullhipotézis vizsgálatára: Összeszámoljuk az m-nél nagyobb mintaelemeket, ez H_0 esetén Bin(n;1/2) eloszlású.
    - Párosított mintákra a $P(X > Y) = 1/2$ nullhipotézis vizsgálatára: Összeszámoljuk azokat a mintaelemeket, ahol $X_i > Y_i$, ez H_0 esetén Bin(n;1/2) eloszlású.
- Wilcoxon (Mann-Whitney) próba független mintákra a $P(X > Y) = 1/2$ nullhipotézis vizsgálatára: rangstatisztika (csak a sorbarendezett mintaelemek sorszámán múlik): $W = \sum_{i,j} I(X_i > Y_j)$. W aszimptotikusan normális eloszlású, H_0 esetén $EW = nm/2$, $D^2(W) = \frac{nm(n+m+1)}{12}$ ebből számolhatóak a kritikus értékek