# Matematikai statisztika

## Informatika alapszak, "A" spec.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: zempleni.elte.hu

E-mail: andras.zempleni@ttk.elte.hu

Szoba: D 3-310

7. előadás

# Feladatok

**E7.)** Az ($A$) gép által termelt termékek egy bizonyos jellemzője $N(11, 1^2)$, míg a ($B$) gépen termelt termékeké $N(13, 4^2)$ eloszlású. Legyenek
$H_0$ : a mintánk az ($A$) gépen készült
$H_1$ : a mintánk a ($B$) gépen készült

Ha egy 16 elemű minta átlaga legfeljebb 12, akkor elfogadjuk $H_0$-t, különben elvetjük.

a.) Mekkora az elsőfajú és a másodfajú hiba valószínűsége?

b.) Milyen $c$ értéket adjunk meg a 12 helyett ahhoz, hogy $0,05$ legyen a próba terjedelme? Ekkor mennyi a másodfajú hiba valószínűsége?

c.) (beadható HF) Milyen $c$ értéket adjunk meg a 12 helyett ahhoz, hogy az elsőfajú és a másodfajú hiba valószínűségének összegét minimalizáljuk?

# A hipotézisvizsgálat menete I.

1.) A terjedelem ($\alpha$) lefixálása, ami jellemzően 1% és 10% közötti, tipikusan 5%
Megbízhatóság$= 1 - \alpha$, általában %-osan írjuk
2.) Nullhipotézis ($H_0$) felírása – sokévi, megszokott, elvárt értékeknek megfelelő paramétertartomány
3.) Alternatív hipotézis ($H_1$) felírása – a feladat alapján bennünket érdeklő kérdésnek megfelelő paramétertartomány
4.) A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása – feltételek ellenőrzése
5.) Próbastatisztika kiszámítása
6.) Kritikus érték kiszámítása, kritikus tartomány ($\mathcal{X}_k$) megállapítása
7.) Döntés:
   - $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \rightsquigarrow$ **erős döntés**, $H_1$-et elfogadjuk, $H_0$-t elvetjük/elutasítjuk
   - $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \rightsquigarrow$ **gyenge döntés**, $H_0$-t nem tudjuk elutasítani

# A hipotézisvizsgálat menete II.

1.) A terjedelem ($\alpha$) lefixálása
2.) Nullhipotézis ($H_0$) felírása
3.) Alternatív hipotézis ($H_1$) felírása
4.) A probléma megoldására alkalmas próba vagy próbák kiválasztása
5.) Számítógéppel dolgozva, az előző dián lévő 6.)-7.) helyett dönthetünk az ún. $p$-érték alapján is:

$$\boxed{p\text{-érték} < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \quad \Leftrightarrow \quad H_1\text{-et elfogadjuk}}$$

***p*-érték**: az a terjedelem, amire a kritikus érték megegyezik a próbastatisztikával (másképpen: a legkisebb olyan $\alpha$, amire az adott minta esetén elvetjük $H_0$-t)
Ha például a $p$-érték$= 0.06$, akkor 5%-os elsőfajú hiba valószínűség mellett nem tudjuk elvetni $H_0$-t, de 10%-os elsőfajú hiba valószínűség esetén már elvetjük $H_0$-t.
Ha a $p$-érték$= 0.16$, akkor a hagyományos, értelmes – 90% fölötti – megbízhatósági szinteken nem tudjuk elvetni $H_0$-t.

# Nevezetes paraméteres próbák – áttekintés

Próbák a normális eloszlás várható értékére vonatkozóan:

- Egymintás $u$-próba, egymintás $t$-próba
- Kétmintás próbák:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">a két minta független</td><td>a két minta párosított</td></tr>
<tr><td>$\sigma_1$ és $\sigma_2$ ismert</td><td colspan="2">kétmintás $u$-próba</td><td>egymintás $u$-próba a különbségekre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\sigma_1$ és $\sigma_2$ ismeretlen</td><td colspan="2">előzetes $F$-próba</td><td rowspan="3">egymintás $t$-próba a különbségekre</td></tr>
<tr><td>$\sigma_1 = \sigma_2$</td><td>$\sigma_1 \neq \sigma_2$</td></tr>
<tr><td>kétmintás t-próba</td><td>Welch-próba</td></tr>
</table>

Próbák normális eloszlás szórásnégyzetére vonatkozóan:

- Egymintás próba: $\chi^2$-próba
- Kétmintás próba: $F$-próba

Összefüggő (párosított) minták: $X_i$ és $Y_i$ ugyanahhoz, az $i$-edik személyhez, tárgyhoz, objektumhoz tartozó véletlen mennyiség, $i = 1, 2, \ldots$

**Kétmintás *u*-próba**

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
$Y_1, \ldots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független minták
ahol $m_1$, $m_2$ ismeretlen paraméterek, $\sigma_1$, $\sigma_2$ ismert

Kétoldali: $H_0 : m_1 = m_2$
$\underline{H_1 : m_1 \neq m_2}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = u := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0, 1)$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |u| > u_{\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén $H_0$ és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak $H_1$, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

| | | |
|---|---|---|
| Egyoldaliak: | $H_1 : m_1 > m_2$ | $H_1 : m_1 < m_2$ |
| Kritikus tartomány: | $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : u > u_\alpha\}$ | $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : u < -u_\alpha\}$ |

Áttekintés

# Nevezetes paraméteres próbák IV

**Kétmintás *t*-próba**

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
$Y_1, \ldots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független minták
ahol $m_1$, $m_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ ismeretlen paraméterek

Kétoldali: $H_0 : m_1 = m_2$
$\underline{H_1 : m_1 \neq m_2}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = t := \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)(S_1^*)^2 + (m-1)(S_2^*)^2}{n+m-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n+m-2}$

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |t| > t_{n+m-2,\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén $H_0$ és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak $H_1$, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

Egyoldaliak: $H_1 : m_1 > m_2$ $\quad$ $H_1 : m_1 < m_2$
Krit. tart.: $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : t > t_{n+m-2,\alpha}\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : t < -t_{n+m-2,\alpha}\}$

Áttekintés

# Nevezetes paraméteres próbák V

**Welch-próba**

$X_1, \ldots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független minták ahol $m_1$, $m_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ismeretlen paraméterek

Kétoldali: $H_0 : m_1 = m_2$
$\underline{H_1 : m_1 \neq m_2}$

Próbastatisztika: $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = t' := \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(S_1^*)^2}{n} + \frac{(S_2^*)^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{t}_f$, ahol

$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n-1} + \frac{(1-c)^2}{m-1}$, $\quad c = \frac{\frac{(s_1^*)^2}{n}}{\frac{(s_1^*)^2}{n} + \frac{(s_2^*)^2}{m}}$, ha $s_1^* > s_2^*$ (így csináljuk)

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |t| > t_{f,\alpha/2}\}$

Egyoldali próbák esetén $H_0$ és a próbastatisztika ugyanaz marad, csak $H_1$, és ezáltal a kritikus tartomány változik.

| | | |
|---|---|---|
| Egyoldaliak: | $H_1 : m_1 > m_2$ | $H_1 : m_1 < m_2$ |
| Krit. tartomány: | $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : t > t_{f,\alpha}\}$ | $\mathcal{X}_k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : t < -t_{f,\alpha}\}$ |

Áttekintés