Matematikai statisztika

Informatika alapszak, "A" spec.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: zempleni.elte.hu

E-mail: zempleni@caesar.elte.hu

Szoba: D 3-310

5. előadás

Intervallumbecslések, példák normális elo. mintára

Def.: **Konfidenciaintervallum.** Olyan intervallum, mely legalább $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazza a paramétert minden ϑ értékre.
Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ i.i.d. minta, $\alpha > 0$ "kicsi" valós szám.

Kétoldali $(1-\alpha)$-megbízhatóságú konfidenciaintervallumok:

- m-re
  - ha σ ismert, akkor $\boxed{\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
  - ha σ ismeretlen, akkor $\overline{X} \pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n^*}{\sqrt{n}}$
- σ^2-re: $\left[\frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$

Egyoldali (alsó) $(1-\alpha)$-konfidenciaintervallumok:

- m-re
  - ha σ ismert, akkor $\left[-\infty, \overline{X} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
  - ha σ ismeretlen, akkor $\left[-\infty, \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha} \frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right]$
- σ^2-re: $\left[-\infty, \frac{(n-1)\cdot(S_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right]$

Intervallumbecslések lefedési valószínűsége

E**7.)** Generáljunk $n = 5, 10, 20, 50, 100$ elemű mintát

a.) $N(1, 2^2)$;

b.) $\mathrm{Exp}(2)$;

c.) $E(1; 5)$

eloszlásból 10^4 alkalommal, majd becsüljük meg a várható értékre adott $\overline{x} \pm \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}$ intervallum lefedési valószínűségét $\alpha = 0,01$, $0,05$ és $0,1$ esetén, ahol $t_{n-1,1-\alpha/2}$ az $n-1$ szabadságfokú t-eloszlás $1-\alpha/2$ kvantilise!

E**8.)** Generáljunk $n = 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ elemű mintát $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlásból 10^4 alkalommal, majd adjunk az ismeretlen λ paraméter ML-becslése alapján intervallumbecslést annak aszimptotikus eloszlása segítségével! Becsüljük meg az intervallumok lefedési valószínűségét $\alpha = 0,01$, $0,05$ és $0,1$ esetén!

Kifejtés után: $\hat{\lambda}_n \pm \frac{D(\hat{\lambda}_n) \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \approx \hat{\lambda}_n \pm \frac{\hat{\lambda}_n \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \hat{\lambda}_n \cdot \left(1 \pm \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$

További példa

E**9.)** Adjunk konfidencia intervallumot a $[0; b]$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterére n elemű minta alapján!
Megoldás:

- az intervallumot érdemes $\max(X_i)$ függvényében keresni, mert ez az elégséges staisztika b-re
- $\frac{\max(X_i)}{b}$ eloszlásfüggvénye z^n a $(0; 1)$ intervallumon (mert X/b E(0;1) eloszlású)
- Mivel a sűrűségfüggvény ($n > 1$-re) szigorúan monoton, ezért a legrövidebb, $1-\alpha$ vszgű tartomány $(\alpha^{1/n}; 1)$
- az $1-\alpha = P(\alpha^{1/n} < \frac{\max(X_i)}{b} < 1)$ összefüggés átrendezéséből $1-\alpha = P(\max(X_i) < b < \frac{\max(X_i)}{\alpha^{1/n}})$ kapjuk a
$$(\max(X_i); \frac{\max(X_i)}{\alpha^{1/n}})$$
konfidencia intervallumot

Beadható feladat, megjegyzések

E10.)

a.) Konstruáljunk pontos konfidencia intervallumot az exponenciális eloszlás paraméterére n elemű minta alapján!

b.) Hasonlítsuk össze a maximum likelihood becslés aszimptotikája alapján adódó intervallummal!

- A gyakorlati alkalmazáshoz a Fisher-féle információt becsülni kell, ha nem ismert a zárt alakja: $\hat{I}_n = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\vartheta^2} \ell(\hat{\vartheta}, x_i) \right)$
- Több paraméter esetére is átvihető

Hány elemű minta kell, hogy az $1-\alpha$ megbízhatóságú intervallum hossza d legyen?

- Közelítő formula az adott szélesség eléréséhez szükséges elemszámra:

$$n \geq 4\sigma^2 \frac{(u_{\alpha/2})^2}{(d)^2}.$$

Az online kurzushoz online jegyzet: `https://people.inf.elte.hu/spigy88/mat_stat_jegyzet.pdf`