Idősorok és többdimenziós statisztika
8. előadás

Zempléni András

2019.11.05

Vizsgainformációk

- Vizsga: írásbeli
- Vizsgaidőpontok: december 18, január 8, 22, 29
- A vizsga összetétele:
  - 30% alapdefiníciók, tételek kimondása (lesz lista)
  - 30% alapvető fogalmakra vonatkozó egyszerű példák (hasonló a villámkérdésekhez)
  - 30% levezetések, amik vagy a diákon voltak vagy felkerültek a táblára
  - 10% R-es programok értelmezése
- Értékelés: nincs beugró rész, 40%-tól kettes, 75%-tól ötös
- Minden vizsga előtt lesz konzultáció

Nem periodikus függvény Fourier felbontása

- Ha nő a periódus hossza, akkor $\frac{2\pi}{p}$ csökken, így egyre közelebb kerülnek a szomszédos frekvenciák.
- Egy nem periodikus függvény tekinthető végtelen hosszú periódussal rendelkező függvénynek, ezért a frekvenciák távolsága 0, tehát a szumma integrálba megy át. A szummában szereplő φ_n együtthatók a λ_n frekvenciához tartoznak, ebből lesz az $\varphi(\lambda)$ függvény.
- Tehát amennyiben a határátmenet végrehajtható, akkor az $x(t)$ nem-periodikus függvény előáll, mint

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \cdot \varphi(\lambda) d\lambda$$

ahol

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i\lambda u} du.$$

Fourier-transzformált

- A határátmenet azonban **nem** mindig végezhető el. Gyorsan lecsengő, vagy korlátos tartójú integrálható függvényekre pl. működik.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $x(t)$ előáll, mint egy $\varphi(\lambda)$ függvény ***Fourier-transzformáltja***[1].
- A $\varphi(\lambda)$ függvény pedig az $x(t)$ ***inverz Fourier-transzformáltja***.
- Az $\frac{1}{2\pi}$ szétosztásával és az $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot G(\lambda)$ jelöléssel:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda, \qquad G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

[1] Az irodalomban ugyancsak szokásos, hogy a negatív kitevővel megadott integrált nevezik Fourier transzformáltnak és a pozitiv kitevőset inverz Fourier transzformáltnak, ekkor azonban az $\frac{1}{2\pi}$ szerepe is változik.

Definíció

$X(t)$ legyen 0 várh. értékű, (folyt. idejű) stacionárius folyamat, $R(\tau)$ autokovarianciával. A folyamat spektrálsűrűségfüggvénye az $R(\tau)$ inverz Fourier-transzformáltja:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R(t) dt.$$

Diszkrét időben, azaz idősorra az integrál szumma lesz:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R(t).$$

Innen persze az is következik, hogy az autokovariancia függvény a spektrálsűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja, azaz

$$R(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

φ periodikus 2π periódussal, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon nézzük

Tulajdonságok

- φ létezik, ha $\sum_{h=1}^{\infty} |R(h)|$ konvergens
- $\varphi \geq 0$
- $$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} R(t).$$
- $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$ (azaz $\varphi(\lambda)$ páros fv.)
- φ egyértelmű
- egy $R : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $\sum_{h=1}^{\infty} |R(h)|$ konvergens, pontosan akkor autokovariancia függvény, ha
$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R(t) \geq 0$$
minden $\lambda \in [-\pi, \pi]$-re

Általános eset

A definíció hátterében Bochner és Hincsin azon tétele áll, amely szerint tetszőleges pozitív definit függvény (így persze $R(t)$ is) előáll, mint egy mérték Fourier-Stieltjes transzformáltja. Ez a mérték az F spektrálmérték, a sűrűségfüggvénye $\varphi(\lambda)$. Ennek következtében az autokovariancia függvény előállítása nem csak az abszolút folytonos esetben lehetséges, tehát ha nincs is spektrálsűrűségfüggvény, akkor is igaz, hogy az F spektrálmértékkel

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda).$$

Példák

- Az $AR(p)$, $MA(q)$ folyamatok spektrálsűrűségfüggvénye létezik
- MA(q)-ra:
$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \left| Q\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2.$$
- AR(1)-re:
$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - 2\alpha_1 \cos(\lambda) + \alpha_1^2} \cdot .$$
- A stacionárius $ARMA(p, q)$ folyamat autokovariancia függvénye szintén karakterizálható és e szerint gyorsan lecsengő (véges összegű), vagyis az $ARMA(p, q)$ rövid emlékezetű – és így létezik a spektrálsűrűségfüggvénye.

Idősorok statisztikája

Első lépés a stacionaritás vizsgálata (pl. ábrázolva az idősort). Ha nem teljesül, akkor általában jó modell az $X_t = a_t + s_t + Z_t$, ahol a_t a trend, s_t a periodikus (szezonális) komponens és Z_t már stacionárius.

- Ha csak trend van:
  - Kereshetjük pl. lineáris vagy kvadratikus alakban és regressziós módszerrel becsülhetjük az együtthatókat
  - Alkalmazhatjuk a differenciálás operátorát
- Ha trend és periodikus komponens is van, legyen $x_{j,k} = x_{(j-1)d+k}$ (a j-dik periódus k-dik megfigyelése; d a periódushossz).
- $x_{j,k} = a_j + s_k + Z_{j,k}$ esetén lehet $\hat{a}_j = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} x_{j,k}$ és $\hat{s}_k = \frac{n}{d}\sum_{j=1}^{n/d}(x_{j,k} - \hat{a}_j)$
- s_t d-edrendű mozgóátlagolással vagy a d távolságra levő megfigyelések közötti különbség képzésével is eltüntethető

A várható érték és az autokovariancia becslése

Legyen $X(t)$ gyengén stacionárius μ várható értékkel és $R(s)$ autokovarianciával.

- Az $\overline{X}$ becslés konzisztens μ-re, ha az autokovarianciára $R(h) \to 0$ $(h \to \infty)$.
- Ha $\sum_{h=1}^{\infty} |R(h)|$ konvergens, akkor $nD^2(\overline{X}) \to \sum_{h=-\infty}^{\infty} R(h)$.
- Az autokovarianciára a

$$\hat{R}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t - \overline{X})(X_{t+h} - \overline{X})$$

becsléseket érdemes használni, mert a belőlük készített tapasztalati autokovariancia-mátrix pozitív szemidefinit.

Paraméterbecslés az AR modellekben

Első a paraméterbecslés és csak utána következik a rendszelekció. (Épp ezért szelekció és nem becslés.)
Az autoregressziós egyenlet:

$$X(t) = \mu + \alpha_1(X(t-1) - \mu) + \ldots + \alpha_p(X(t-p) - \mu) + \varepsilon(t)$$

Így most a várható érték sem feltétlen 0, hanem ismeretlen konstans: $EX(t) = \mu$ Ezzel a modell paraméterek: $(\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \sigma_\varepsilon)$.

Tegyük fel, hogy $P(z) = 1 - (\alpha_1 z + \ldots + \alpha_p z^p)$ gyökei az egységkörön belül vannak, és így létezik az $X(t)$ stacionárius megoldás.

Megjegyzések

- Az autoregresszió regresszióra hasonlít, de a függő változója $X(t)$ és a független változói ugyanazon $X(t)$ eltoltjai, késleltetettjei, így nem csak a változók, hanem a megfigyelések "esetek", "sorok" is korreláltak.
- Ez a becslést nem, de a tulajdonságait, "jóságát", eloszlását befolyásolja, a szokásos teszteket, konfidencia intervallumokat, szórásnégyzetet érvényteleníti.
- A közönséges legkisebb négyzetek (OLS) módszere a regressziónak megfelelően alkalmazható.

OLS becslés

A következő Q kvadratikus funkcionált kell minimalizálni:

$$Q(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{t=p+1}^{N} \varepsilon_t^2 = \qquad (0.1)$$

$$\sum_{t=p+1}^{N} [X(t) - \mu - \alpha_1(X(t-1) - \mu) - \dots - \alpha_p(X(t-p) - \mu)]^2 \to min$$

Az (0.1)-beli szummából az $\varepsilon^2(1), \dots, \varepsilon^2(p)$ tagokat ki kell hagyni, mert $X(0), \dots, X(-p+1)$ nem megfigyelhető.

ML becslés **Gauss** generáló zaj esetén

- Először AR(1)-re:

$$(X(t) - \mu) - \alpha(X(t-1) - \mu) = \varepsilon(t)$$

- A függetlenség miatt

$$f(x_1, \dots, x_T) = f(x_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon_T)$$

és ez proporcionálisan (a konstansokat elhagyva):

$$f(x_1, \dots, x_T) \propto f(x_1) \cdot \frac{1}{\sigma_\varepsilon^{T-1}} \cdot exp\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \cdot \sum_{t=2}^{T} \varepsilon_t^2\}$$

- Ebből az adott kezdőérték melletti feltételes likelihood:

$$f(X(2), \dots, X(T) \mid X(1)) \propto$$

$$\frac{1}{\sigma_\varepsilon^{T-1}} \cdot exp\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \cdot \sum_{t=2}^{T} [X(t) - \mu - \alpha(X(t-1) - \mu)]^2\}$$

- AR(p)-re analóg módon megkapható a likelihood függvény

Kapcsolat az OLS és az ML becslés között

- Ez ugyanannak a $Q(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ funkcionálnak a minimalizására vezet, mint az OLS.
- Ez ugyanaz a kapcsolat, mint a közönséges regresszió esetén a OLS és a Gauss ML között.
- Ha a teljes (nem feltételes) likelihoodot nézzük, akkor mivel $X(1) \sim N(\mu, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$

  $f(x_1, ..., x_T) \propto$
  $\frac{\sqrt{(1-\alpha^2)}}{\sigma_\varepsilon} \cdot exp\left\{-\frac{1-\alpha^2}{2\sigma_\varepsilon^2}(x_1 - \mu)^2\right\} f(x_2, \dots, x_T \mid X_1 = x_1)$

  ami már nemlineáris legkisebb négyzetes minimalizálásra vezet, viszont az eltérés a lineáristól kicsi és nagyon gyorsan 0-hoz tart.