Idősorok és többdimenziós statisztika
3. előadás

Zempléni András

2019.09.24

Elágazó folyamatok

- X_n az egyedek száma az n-edik lépésben
- Az $n+1$-edik lépésben mindenkinek véletlen számú utóda születik (a k-adiknak Y_k, ezek független azonos eloszlásúak, nemnegatív egész értékűek) és így

$$X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{X_n}$$

- Ebben a modellben az X_n egyed elpusztul és csak az utódai élnek tovább
- A 0 önmagában egy osztály (nyelő)
- Legyen G_1 az Y_1 generátorfüggvénye
- $G_n(s) = E(s^{X_n}|X_0 = 1)$
- Ha $X_0 = k$, akkor a gráf k db diszjunkt részgráfból áll
- $G_{n+1}(s) = G_1(G_n(s)) = G_n(G_1(s))$
- Az n-edik generáció várható értéke $\mu_n = \mu^n$, ahol $\mu = E(Y_1)$

Kihalási valószínűség

- Esetek:
  - $\mu > 1$: szuperkritikus ($E \to \infty$)
  - $\mu < 1$: szubkritikus ($E \to 0$)
  - $\mu = 1$ kritikus ($E = 1$)
- A kihalás ideje:
$$T_0 = \inf\{n : X_n = 0\}$$
- A kihalás valószínűsége:
$$\alpha_k = P(T_0 < \infty|X_0 = k)$$
- Kiszámítása: $G_1(\alpha) = \alpha$ egyenlet legkisebb megoldása
- Alkalmazás: járványterjedés, genetikai modellek

Folytonos idejű Markov-láncok

- Az állapottér most is véges vagy megszámlálható!
- Az átmenetvalószínűség mátrix helyett

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j|X_s = i), \quad t > 0,$$

(feltesszük, hogy s-től független, a Markov tulajdonság miatt nem kellenek a korábbi értékekre vonatkozó feltételek)
- Chapman-Kolmogorov összefüggés: $P(s + t) = P(s)P(t)$ (mátrix-szorzás).
- Ebből analitikus eszközökkel lehet az ún. infinitezimális generátort megadni
- Születési-halálozási folyamat $N(t) \in \mathbb{N}$
  - az állapottér a nemnegatív egészek halmaza
  - véletlen időpontokban vagy eggyel nő az érték (születés)
  - vagy eggyel csökken (halálozás)

Születési-halálozási folyamatok

- A születési intenzitás az i állapotban λ_i
- A halálozási intenzitás az i állapotban μ_i
- A következő eseményre a várakozási idő exponenciális eloszlású, $\lambda_i + \mu_i$ paraméterrel
- Ez úgy is tekinthető, mint két független exponenciális eloszlású változó ($B(i)$ és $D(i)$) minimuma
- Az esemény időpontjában $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$ valószínűséggel születés, $\mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$ valószínűséggel halálozás történik
- Tiszta születési folyamat: $\mu_i = 0$, a trajektóriák monoton növők)
- Spec.: Ha a születési folyamatnál az intenzitás konstans, akkor a Poisson folyamathoz jutunk

Poisson folyamat

Az $N(t)$ nemnegatív egész értékű folyamat ($t \in \mathbb{R}_+$) Poisson folyamat, ha

- $N(t)$ eloszlása λt paraméterű Poisson eloszlás
- $N(v) - N(u)$ és $N(t) - N(s)$ független, ha $s < t < u < v$.
- $N(0) = 0$

Ebből következik, hogy

- az események közötti várakozási idő λ paraméterű exponenciális eloszlás

A Poisson folyamat úgy is reprezentálható, mint olyan nemnegatív egész értékű, növekvő folyamat, ami

- homogén ($N(t + u) - N(t)$ eloszlása csak u-tól függ)
- nemelfajuló ($P(N(h) > 0) = ah + o(h)$ és $P(N(h) > 1) = o(h)$ ha $h \to 0$)
- független növekményű

Felújítási folyamat

Az $N(t)$ nemnegatív egész értékű folyamat ($t \in \mathbb{R}_+$) felújítási folyamat, ha az értéke véletlen időpontokban eggyel nő és az események közötti idő független azonos eloszlású valószínűségi változó (X_i).
Megjegyzés: ez általában nem Markov folyamat

- Spec.: a Poisson folyamat is felújítási folyamat (itt exponenciális eloszlású az események közötti időtartam)
- Az eseményekre gyakran mint meghibásodásokra tekintünk
- $N(t) = \max\{k : X_1 + X_2 + \dots X_k < t\}$
- $E(N(t)) =: M(t)$ (felújítási függvény)
- $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (az n-edik "felújítás" időpontja), az eloszlása a konvolúciós formulával számolható

Fontos mennyiségek

- $\gamma(t) = S_{N(t)+1} - t$ reziduális élettartam
- $\delta(t) = t - S_{N(t)}$ aktuális élettartam
- $\beta(t) = \gamma(t) + \delta(t)$ teljes élettartam

A Poisson folyamatra

- $M(t) = \lambda t$
- $\gamma(t)$ exponenciális eloszlású λ paraméterrel
- $\delta(t)$ csonkolt exponenciális eloszlású: $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$ (ha $x \leq t$) és 1 különben
- A teljes élettartam várható értéke:

$$\frac{1}{\lambda}(1 + 1 - \exp\{-\lambda t\})$$

ami közel 2-szerese a felújítási események közötti intervallum várható értékének, ha t nagy (felújítási paradoxon)

Brown mozgás (Wiener folyamat)

- $X(0) = 0$ és folytonosak a trajektóriák
- $X(t+s) - X(s)$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $\sigma^2 t$ szórásnégyzettel
- diszjunkt intervallumokra a növekmények függetlenek – ebből következik a Markov tulajdonság (Markov–folyamat)

Megjegyzések

- Nyilván $X(t)$ is normális eloszlású 0 várható értékkel és $\sigma^2 t$ szórásnégyzettel
- Itt már az állapottér is folytonos
- Több alternatív módon is bevezethető:
  - részecskék mozgása
  - véletlen bolyongás határértéke
- A $\sigma = 1$ eset a standard Brown-mozgás
- A feltételek konzisztensek, mert független normális eloszlású változók összege is normális és ilyenkor a szórásnégyzetek összeadódnak

A standard Brown mozgás tulajdonságai

- Legyen $0 < t < 1$. Ekkor $X(t)$ eloszlása (feltéve, hogy $X(0) = X(1) = 0$) normális 0 várható értékkel és $t(1-t)$ szórásnégyzettel
- A trajektóriák folytonosak, de nem deriválhatóak
- Tükrözési elv
- Következmény: $\mathbb{P}(\max_{0 \le t \le T} X(t) > a) = 2\mathbb{P}(X(T) > a)$

Megjegyzések

- Nyilván $X(t)$ is normális eloszlású 0 várható értékkel és $\sigma^2 t$ szórásnégyzettel
- Itt már az állapottér is folytonos
- Több alternatív módon is bevezethető:
  - részecskék mozgása
  - véletlen bolyongás határértéke
- A $\sigma = 1$ eset a standard Brown-mozgás
- A feltételek konzisztensek, mert független normális eloszlású változók összege is normális és ilyenkor a szórásnégyzetek összeadódnak

Kiterjesztések

Brown mozgás drifttel: $Y(t) = X(t) + \mu t$ ahol $X(t)$ Brown mozgás, $\mu \in \mathbb{R}$. Tulajdonságai:

- $X(0) = 0$ és folytonosak a trajektóriák
- $X(t+s) - X(s)$ normális eloszlású μt várható értékkel és $\sigma^2 t$ szórásnégyzettel
- diszjunkt intervallumokra a növekmények függetlenek
- a tükrözési elv itt már nem működik

Geometriai Brown mozgás: $Y(t) = e^{X(t)}$