Idősorok és többdimenziós statisztika

2. előadás

Zempléni András

2019. szeptember 17.

Tulajdonságok, példák

- Legyen $i \neq j$. $i \to j$ akkor és csak akkor, ha $f_{ij}^* > 0$.
- A nem lényeges állapotok tranziensek (fordítva azonban nem feltétlenül igaz).
- Az egydimenziós bolyongás akkor és csak akkor visszatérő, ha szimmetrikus.
- Ha i rekurrens állapot d periódussal, akkor $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{m_i}$.
- Legyen i, j két tetszőleges állapot, és jelölje j periódusát d. Ekkor $r = 1, 2, \ldots, d$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}^*(r)\frac{d}{m_j},$$
ahol $f_{ij}^*(r)$ annak a valószínűsége, hogy d-vel osztva r maradékot adó lépésben jut el a lánc i-ből j-be. Így $\sum_{r=1}^{d} f_{ij}^*(r) = f_{ij}^*$. (Tranziens állapotra legyen $m_j = \infty$.)

Következmények, az állapotokban töltött idő

- Ha j tranziens vagy nulla rekurrens, akkor $p_{ij}^{(n)} \to 0$.
- Példa: az egydimenziós szimmetrikus bolyongás nulla rekurrens.
- Ha i és j ugyanabban az aperiodikus, pozitív rekurrens osztályban vannak, akkor $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_j}$.
- Ha i és j ugyanabban a d periódusú, pozitív rekurrens osztályban vannak, méghozzá $j \in C_r(i)$ (az a rész, ami $r + nd$ lépésben érhető el i-ből), akkor $p_{ij}^{(nd+r)} \to \frac{d}{m_j}$.
- Minden i, j állapotpárra $\lim n^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = f_{ij}^*/m_j$. Itt a bal oldal azt fejezi ki, hogy i-ből indulva, a lánc hosszú távon várhatóan a lépések hányad részét tölti a j állapotban.

Stacionárius eloszlás

- Van-e a Markov-láncnak olyan kezdeti eloszlása, mely időben nem változik? Ha X_0 eloszlása μ, akkor X_1-é:
$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{k\in I} \mu_k p_{ki}.$$
Ha X_1 eloszlása is μ, akkor persze X_n eloszlása is μ minden n-re, és ekkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc stacionárius
- Legyen P egy átmenetmátrix. A $(\mu_i)_{i\in I}$ eloszlás stacionárius, ha $\mu_i = \sum_{k\in I} \mu_k p_{ki}$ minden $i \in I$-re.
- Legyen C lényeges osztály és $\pi_i = 1/m_i$ az átlagos visszatérési idő reciproka. Ekkor az
$$u_i = \sum_{k\in C} u_k p_{ki}, \quad i \in C$$
egyenletrendszer abszolút konvergens megoldásai:
  1. Ha C tranziens vagy nulla rekurrens, akkor csak az $u_i = 0$ triviális megoldás.
  2. Ha C pozitív rekurrens, akkor a $(\pi_i)_{i\in C}$ konstansszorosai.

Ehrenfest diffúziós modell

- Legyen egy tartályban N darab molekula.
- A tartályt két egyenlő részre osztjuk, és azt vizsgáljuk, hogy hány molekula van a két félben.
- Minden lépésben egy véletlenszerűen választott molekula átmegy a másik felébe a tartálynak.
- Jelölje X_n, hogy n lépés után hány molekula van a tartály első felében. Ez nyilván irreducibilis Markov-lánc a $\{0, 1, \ldots, N\}$ állapottéren, tehát pozitív rekurrens is.
- Az átmenetvalószínűségek:

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{N}, \quad p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}.$$

- A stacionaritás egyenletei a $\mu_i = \frac{N-i+1}{i}\mu_{i-1}$ rekurziót adják. Ennek megoldása éppen az N rendű, $1/2$ paraméterű binomiális eloszlás.

Határeloszlások

- A Markov-láncnak van határeloszlása, ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$$

minden $i, j \in I$-re létezik és j-ben valószínűségeloszlás
- A konvergencia teljesül, ha a lánc pozitív rekurrens, aperiodikus és irreducibilis
- Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = 1/m_j$$

és ez az egyetlen stacionárius eloszlás
- Másik elégséges feltétel a véges állapotterű esetben a P átmenetvalószínűségmátrix regularitása (azaz, hogy $\exists n$, hogy P^n minden eleme pozitív)

Megjegyzések

- Az irreducibilitás nyilvánvalóan szükséges a határeloszlás egyértelműségéhez (elérhető külön-külön tekintve az osztályokat)
- Az aperiodikusság is szükséges (pl. a két állapot között alternáló lánc) - de stacionárius eloszlás lehet ebben az esetben is
- Nulla rekurrens ellenpélda a szimmetrikus bolyongás, ahol nincs stacionárius eloszlás

Ergodikusság

- Ha a Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus és pozitív rekurrens, akkor ergodikus is, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k = i) = \frac{1}{m_i}$$

- Az előzőek értelmében a határeloszlás éppen a stacionárius eloszlás
- A konvergencia általában elég gyors
- Alkalmazható Monte Carlo módszereknél:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = E_\pi(f)$$

Markov-lánc Monte Carlo módszerek

- Az első lépés olyan Markov-lánc szimulációja, aminek az adott pozitív tagú π sorozattal arányos a stacionárius eloszlása
- Ha teljesül a megfordíthatóság: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ minden $i, j \in I$-re, akkor (pozitív rekurrens, irreducibilis, aperiodikus esetben) az ergodikusság miatt X_n határeloszlása éppen π.
- Az általános esetben (Metropolis-Hastings algoritmus) pedig legyen
$$\tilde{p_{ij}} = p_{ij} \min\{1, \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}\},$$
($\tilde{p_{ii}} = 1 - \sum_{j \neq i} \tilde{p_{ij}}$), ez már megfordítható láncot ad. Mivel az algoritmus csak a π_i értékek arányát használja, ezért nem kell ismernünk az összegüket

Szakirodalom:

- Karlin - Taylor: Sztochasztikus folamatok
- Csiszár Villő e-jegyzete (l. a honlapját)
- N. Privault: Notes on Markov-chains