Valószínűségszámítás 1, 2. minta zárthelyi dolgozat, 2022 ősz

(1) Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, sűrűségfüggvényük:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}; & x > 2; \\ 0; & x \leq 2. \end{cases}$$

Konvergens-e valamilyen értelemben az $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ valószínűségi változókból álló sorozat, és ha igen, mi a limesze?

Megoldás. Az X_j valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{2}^{\infty} \frac{8}{x^2}\, dx = \left[-\frac{8}{x} \right]_{x=2}^{\infty} = 4.$$

Mivel véges a várható érték, és a valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, a nagy számok erős törvénye alapján az átlag 1 valószínűséggel konvergál $\mathbb{E}(X_1) = 4$-hez. Az 1 valószínűségű konvergenciából a sztochasztikus és az eloszlásbeli is következik.

(2) Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember jövedelme (ezer forintban számolva) 500 várható értékű és 50 szórású valószínűségi változó (ez mindenkinél azonos eloszlás). Függetlenül kiválasztva 100 embert, mennyi a valószínűsége, hogy az átlagos jövedelmük több 510 ezer forintnál? Adjunk közelítést erre a valószínűségre, illetve adjunk felső becslést is a Csebisev-egyenlőtlenség alapján.

Megoldás. Legyen X_j a j. kiválasztott ember jövedelme. Ekkor a várható érték additivitását és a függetlenséget felhasználva

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \right) = 100 \cdot 500 = 50000; \qquad D^2\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \right) = 100 \cdot 50^2 = 250000.$$

Legyen $\overline{X}$ az átlag. A fentiekből az is következik, hogy

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = 500; \qquad D(\overline{X}) = \frac{1}{100} \cdot D\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \right) = 5.$$

Így a Csebisev-egyenlőtlenséget az átlagra alkalmazva:

$$\mathbb{P}(\overline{X} > 510) \leq \mathbb{P}(|\overline{X} - \mathbb{E}(\overline{X})| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = 25\%.$$

Másrészt, a centrális határeloszlástételen alapuló közelítés szerint

$$\mathbb{P}(\overline{X} > 510) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j - 100 \cdot 500 > 100 \cdot 10 \right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 100 \cdot 500}{10 \cdot 50} > 2 \right) \approx 1 - \Phi(2) = 3\%,$$

hiszen $\mathbb{E}(X_1) = 500, D(X_1) = 50$ és $n = 100$ helyettesítések után éppen a centrális határeloszlástételben szereplő kifejezést kapjuk.

(3) Tegyük fel, hogy az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \mathbb{I}(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1) \cdot (x + y) \cdot c,$$

ahol c megfelelő pozitív szám.

a) Határozzuk meg c értékét.

Megoldás.

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy = \int_0^1 (\frac{1}{2} + y) dy = 1,$$

tehát $c = 1$. Így valóban sűrűségfüggvényt kapunk, hiszen a megadott függvény nemnegatív és a fenti számolás értelmében 1 az integrálja $\mathbb{R}^2$-en.

b) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

Megoldás.

$$E(X|Y = y) = \frac{\int_0^1 x(x + y) dx}{\int_0^1 (x + y) dx} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{y}{2}}{\frac{1}{2} + y} = \frac{2 + 3y}{3 + 6y}.$$

A végeredmény reálisnak tűnik, mert 0 és 1 közötti, sőt még az is leolvasható, hogy a legnagyobb értéke $2/3$ ($y = 0$ esetén, ekkor a feltételes sűrűségfüggvény 0-ról nő lineárisan 1-re), míg a legkisebb értéke $5/9$ ($y = 1$ esetén, ekkor a feltételes sűrűségfüggvény 1-ről nő lineárisan 2-re).

c) $P(X + Y < 1) =?$

Megoldás.

$$P(X+Y<1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)dydx = \int_0^1 (x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ami megintcsak reális, mert a sűrűségfüggvény értéke kisebb a négyzet ezen felén, mint a másikon.

(4) Tegyük fel, hogy egy 1000 km-es sivatagi autós túrára indultunk egy pótkerékkel. Sajnos az utak nagyon rosszak, így itt az egyes kerekek élettartama független exponenciális eloszlásúnak tekinthető, de csupán 1000 km várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy célba tudunk érni külső segítség nélkül? (A kereket ki tudjuk cserélni szükség esetén, de javítani nem tudjuk.)

Megoldás. Az exponenciális eloszlás nevezetes tulajdonságait tudjuk használni. Jelölje X_i az i-dik kerék élettartamát (km-ben, $i = 1, ...4$). Az első defekt "időpontja" $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$, ami szintén exponenciális eloszlású, $\lambda = \frac{4}{1000}$ paraméterrel. A kerékcsere után a régi kerekek is újként viselkednek az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt a következő defektig megtett út, Y_2 ugyanolyan eloszlású lesz mint Y_1 és tőle független. A keresett valószínűség tehát $P(Y_1+Y_2 > 1000)$, ami kihasználva, hogy független azonos paraméterű exponenciális eloszlások konvolúciója Gamma eloszlás $(2, \lambda)$ paraméterrel, éppen $1 - F(1000) = 0,0916$ a megfelelő paraméterű Gamma eloszlás eloszlásfüggvényéből. Nem meglepő, hogy ilyen kicsi a keresett valószínűség, hiszen a defektek közötti út várható értéke csupán 250 km.

(5) Legyen X sűrűségfüggvénye $2x$ ha $0 < x < 1$, Y pedig egyenletes eloszlás a $(0; 1)$ intervallumon és tegyük fel, hogy függetlenek. Adjuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!

Megoldás.

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z < 0 \text{ vagy } z > 2 \\ \int_0^z f_X(u) f_Y(z-u)du = \int_0^z 2udu = z^2 & \text{ha } 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 f_X(u) f_Y(z-u)du = \int_{z-1}^1 2udu = 1-(z-1)^2 & \text{ha } 1 \le z \le 2. \end{cases} \quad (1)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott függvény nemcsak hogy sűrűségfüggvény, de folytonos is és a maximuma az $1/2$-ben van.