Valószínűségszámítás, 4. feladatsor, 2022. október 3-7.

1. Legyenek az X diszkrét valószínűségi változó értékei $-2, 1, 3$, a következő valószínűségekkel:

$$P(-2) = 1/2, \quad P(1) = 1/3, \quad P(3) = 1/6.$$

Rajzolja fel az $F(x)$ eloszlásfüggvényt! Mennyi X várható értéke?

Megoldás

Definíció szerint $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$

Például $F(1) = \mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(X = -2) = 1/2$, vagy $F(2) = \mathbb{P}(X < 2) = 1/2 + 1/3 = 5/6$

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

Szintén definíció szerint X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=-2}^{3} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = -2 \cdot \mathbb{P}(X = -2) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) = -\frac{1}{6}.$$

2. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás– és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

Megoldás

Legyen Z a középponttól való távolság. Ekkor $0 \leq Z \leq 1$, így a továbbiakban csak erre az intervallumra szorítkozunk (tehát az eloszlásfüggvény a $(-\infty, 0)$ intervallumon 0, az $(1, \infty)$ intervallumon 1).

$$F(r) = \mathbb{P}(Z < r) = \frac{r^2\pi}{1^2\pi} = r^2,$$

ebből deriválással adódik, hogy

$$f(r) = F'(r) = 2r\mathbb{I}(0 \leq r \leq 1),$$

és könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban sűrűségfüggvény:

$$F(r) = \int_{-\infty}^{r} f(x)\, dx$$

minden r-re.

$$EZ = \int_0^1 r \cdot 2r \text{ dr} = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(Z^2) = \int_0^1 r^2 \cdot 2r \text{ dr} = \left[\frac{2r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D^2(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \Rightarrow D(Z) = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,2357$$

3. Legyen X sűrűségfüggvénye $\dfrac{c}{x^4}$ ha $x > 1$, és 0 különben.

   a) Mennyi c értéke?

   b) Számítsuk ki X momentumait minden olyan $k \geq 1$-re, melyre ez véges.

   c) Mennyi X szórása?

Megoldás

a) Általában is,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

ha f a sűrűségfüggvény.

Mivel $1 = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{c}{x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{c}{-3\cdot t^3} - \frac{c}{-3\cdot 1^3}\right] = 0 + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}$

$\left(\text{egyszerűbb jelöléssel: } 1 = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^4} dx = \left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{3}\right)$, így következik, hogy $c = 3$.

b) $\mathbb{E}(X^k) = \int_1^{\infty} x^k \frac{3}{x^4}\,dx = \left[\frac{3\cdot x^{k-3}}{k-3}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{3-k}$, ha $k = 1, 2$. Ha $k \geq 3$, akkor nem létezik a k. momentum.

c) $E(X^2) = \int_1^{\infty} x^2 \frac{3}{x^4}\,dx = \left[\frac{-3}{x}\right]_1^{\infty} = 3$, tehát a szórásnégyzet: $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3 - 1,5^2 = 0,75$, vagyis a szórás $D(X) = \sqrt{0,75} \approx 0,866$

Ez az eloszlás a Pareto-eloszlások közé tartozik, a Pareto-eloszlásokat például a biztosításmatematikában használják a kárkifizetések modellezésénél.

4. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1,4]$ intervallumon. Számítsuk ki $(X-1)^2$ várható értékét!

Megoldás

Az $X-1$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,3]$ intervallumon. Tehát a sűrűségfüggvénye $f(y) = \mathbb{I}(0 < y < 3)\frac{1}{3}$.

$$\mathbb{E}((X-1)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\,dy = \int_0^3 y^2 \cdot \frac{1}{3} dy = 3.$$

Más megoldás:

$$E((X-1)^2) = D^2(X-1) + E^2(X-1) = \frac{(3-0)^2}{12} + \left(\frac{0+3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$

Harmadik megoldás: ha g az X sűrűségfüggvény, akkor

$$\mathbb{E}((X-1)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 g(x)\,dx = \int_1^4 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{3}\,dx = 3.$$

5. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ c\cdot x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Mennyi c értéke? Mennyi annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy $1/2$ és $3/4$ közé esik? Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

Megoldás

Minden sűrűségfüggvényre igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Most

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 c\cdot x\,dx = c\int_0^1 x\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 = c\cdot\frac{1}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad c = 2.$$

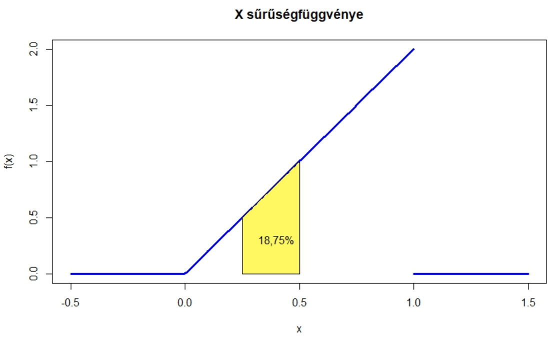
Azokba az intervallumokba, ahol azonosan 0 a sűrűségfüggvény, X nulla valószínűséggel esik, tehát most 1 valószínűséggel a $[0,1]$ intervallumból veszi fel az értékét.

Általában, ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

teljesül tetszőleges $a < b$ esetén. Ezért annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik:

$$\mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{1/4}^{1/2} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=1/4}^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} = 18,75\%.$$



Hasonlóképpen annak valószínűsége, hogy X értéke $1/2$ és $3/4$ közé esik:

$$\mathbb{P}(1/2 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/2}^{3/4} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{3/4} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=1/2}^{3/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} = 31,25\%.$$

Az eloszlásfüggvény meghatározásához az $F(t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ összefüggést használhatjuk. Ez a függvény 0, ha $t < 0$, hiszen azonosan nullát integrálunk. Másrészt, ha $0 < t < 1$, akkor

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t 2xdx = \left[x^2\right]_{x=0}^{t} = t^2.$$

Ha pedig $t > 1$, akkor

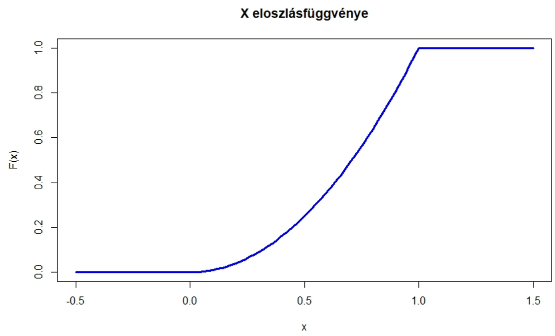
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_{x=0}^{1} = 1.$$

Ha két számot választanánk a $(0,1)$ intervallumból egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül, és vennénk a nagyobb számot, annak a sűrűségfüggvénye pont a fenti f lenne.

6. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

Megoldás

Legyen X a sikeres dobások száma az n dobásból. Ekkor X egy p paraméterű binomiális eloszlást követ, melyre $p = \frac{11}{36}$ a sikeres dobás valószínűsége. Így X várható értéke $\mathbb{E}(X) = np$, azaz várhatóan $\frac{11}{36}n$ sikeres dobásunk lesz.



7. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Várhatóan hány emeleten áll meg a lift?

   Megoldás

   Legyen X_j annak indikátora, hogy a j. emeleten megáll a lift ($j = 1, 2, \ldots, 10$). Ekkor a kérdés valójában az X_j-k összegének várható értéke, ami a várható érték additív tulajdonsága alapján, illetve az alapján, hogy egy emeleten akkor nem áll meg a lift, ha mindenki a többi 9 emelet valamelyikét választja, és ezek a választások egymástól függetlenek:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = 10 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{15}\right) = 7,94.$$

8. Mennyi az ötöslottón kihúzott

   a) számok összegének várható értéke?

   b) páros számok számának várható értéke?

   c) a kihúzott páros számok összegének várható értéke?

   Megoldás

   a) Egy húzásnál a várható érték $1 \cdot \frac{1}{90} + 2 \cdot \frac{1}{90} + \cdots + 90 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1+2+\ldots+90}{90} = 45,5$. Öt szám kihúzása esetén pedig az összeg várható értéke $5 \cdot 45,5 = 227,5$, a várható érték linearitása (additivitása) miatt.

   b) A lottón kihúzott (páros és páratlan) számok számának várható értéke 5, azaz $E(\text{párosak száma}) + E(\text{páratlanok száma}) = 5$. Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám közül választhatunk, így $E(\text{párosak száma}) = E(\text{páratlanok száma})$. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a $E(\text{párosak száma}) = 2,5$.

   c) Legyen az X_j valószínűségi változó értéke j, ha j páros és a j számot kihúztuk, és 0 különben ($j = 1, 2, \ldots, 90$). Ekkor a kihúzott páros számok összege éppen az X_j-k összege, így a kérdéses várható érték, a várható érték additív tulajdonsága alapján:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{90} X_j\right) = \sum_{j=1}^{90} \mathbb{E}(X_j) = \sum_{k=1}^{45} \frac{5}{90} \cdot 2k = \frac{10}{90} \cdot \frac{45 \cdot 46}{2} = 115,$$

   felhasználva, hogy minden számot $5/90$ valószínűséggel húzunk ki.

9. Egy ünnepi fogadáson 125 ember vett részt. Mindegyikük leadott egy esernyőt a ruhatárba. A részeg ruhatáros teljesen összekeverte az esernyőket. Várhatóan hány ember megy haza a saját ernyőjével?

   Megoldás

   Legyen X_j annak indikátora, hogy a j. ember a saját esernyőjével tér haza ($j = 1, 2, \ldots, 125$). Ekkor a kérdés valójában az X_j-k összegének várható értéke, ami a várható érték additív tulajdonsága alapján, illetve az alapján, hogy mindenki $1/125$ valószínűséggel tér haza a saját esernyőjével:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = 125 \cdot (1 \cdot \frac{1}{125} + 0 \cdot \frac{124}{125}) = 1.$$

   Tehát a saját esernyőjükkel hazatérő emberek száma 1.

10. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettõn 1-es, kettõn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerûen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

Megoldás

Legyen X_i annak az indikátora, hogy mindkét i feliratú lap bent marad az m lap kivétele után, azaz

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha mindkét } i \text{ feliratú lap bent marad} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$p = P(X_i = 1) = \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}. \qquad \left(\text{Legyen} \binom{n}{k} := 0, \text{ ha } n < k.\right)$$

Legyen X a dobozban maradt párok száma az m lap kivétele után. Ekkor $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, melynek várható értéke

$$EX = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_N = Np = N\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = \frac{(2N-m)(2N-1-m)}{2(2N-1)}.$$

11. Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan három út nyílik. Az első egy három perces út végén a szabadba vezet. A második út öt, a harmadik hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe.

a) A bányász minden alkalommal a többi választástól függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

b) A bányász minden alkalommal azonos valószínűséggel választ egyet az olyan utak közül, amiken még nem járt. Legyen Y a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi Y várható értéke?

Megoldás

a) Legyen L a szabadba jutáshoz szükséges idő várható értéke. Alkalmazzuk a teljes várható érték tételét arra a teljes eseményrendszerre, hogy a szabadba vezető, az ötperces illetve a hétperces utat sikerül megtalálni. Ez alapján

$$L = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot(L+5) + \frac{1}{3}\cdot(L+7) \qquad \Rightarrow \qquad L = 15.$$

Hiszen például a második utat választva a kijutás idejének feltételes várható értéke $L + 5$.

b) Vegyük észre, hogy ha elsőre az ötperces utat választja, akkor a kijutáshoz szükséges idő várható értéke ez után $\frac{1}{2}(3+10) = \frac{13}{2}$, hiszen másodikra vagy a szabadba vezető utat választja rögtön, vagy a hétpercest, akkor annak végigjárása után viszont biztosan megtalálja a kivezető utat. Hasonlóképpen, ha elsőre a hétperces utat választja, akkor ez után várhatóan $\frac{1}{2}(3+5) = 4$ percet kell még a bányában töltenie. Az a) részhez hasonlóan alkalmazva a teljes várható érték tételét:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}\left(3 + \left(5 + \frac{13}{2}\right) + (7+4)\right) = \frac{51}{6} = \frac{17}{2}.$$

12. Szerencsejátékot játszunk, amely során minden fordulóban a feltett tétet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megduplázzuk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig elveszítjük. Kezdetben 1 petákunk van. Addig folytatjuk, amíg 5 petákunk nem lesz vagy el nem fogy az összes pénzünk. Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha a mohó stratégiát követjük, azaz mindig akkora tétet választunk, amennyi az öthöz hiányzik, vagy ha ez nem lehetséges, akkor az összes pénzünket feltesszük? Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha az óvatos stratégiát követjük, és minden lépésben egy petákot teszünk fel? Mennyi a valószínűsége az egyes esetekben, hogy az 5 petákot érjük el?

Megoldás

Minden lépésben vagy az összes pénzünket feltesszük, és 1/2 valószínűséggel el is veszítjük (és véget ér a játék), vagy pedig csak az 5-höz hiányzó részt tesszük fel, és 1/2 valószínűséggel nyerünk. Ez a kettő egyszerre nem lehetséges, hiszen 5 páratlan. Ezért minden lépésben a többitől függetlenül 1/2 valószínűséggel ér véget a játék. Vagyis a játék hossza geometriai eloszlású, a lépések számának várható értéke 2.

Ha az óvatos stratégiával játszunk: legyen L_j a hátralévő lépések számának várható értéke, ha j pénzünk van. A teljes várható érték tétele alapján, és felhasználva, hogy a szimmetria miatt $L_3 = L_2$:

$$L_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\big(1 + L_2\big);$$
$$L_2 = \frac{1}{2}\cdot\big(1 + L_1\big) + \frac{1}{2}\cdot\big(1 + L_2\big);$$

A kétváltozós lineáris egyenletrendszert megoldva $L_1 = 4$ és $L_2 = 6$ adódik. Tehát ilyenkor várhatóan 4 lépés múlva ér véget a játék.