Valószínűségszámítás, 3. feladatsor, 2022. szeptember 26-30.

1. Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

   Megoldás

   Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, ..., 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_{10})$. Könnyen látható, hogy $\mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}}$, ugyanis az a kedvező eset, ha mind a 20 Kinder-tojásban a $10 - k$ figura valamelyike van, az összes 10^{20}-féle elosztás pedig egyformán valószínű. Ezért $S_k^{(10)} = \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}}$, hiszen $\binom{10}{k}$-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik k esemény metszetét nézzük. Ezután a Poincaré-formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_{10}) = \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}} \approx 0,7853.$$

   Tehát a keresett valószínűség: $1 - 0,7853 = 0,2147$.

2. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift (ha csak a kiszállások számítanak megállásnak)?

   Megoldás

   Hasonlóan az előző feladathoz, legyen A_i az az esemény, hogy az i. emeleten nem áll meg a lift ($i = 1, ..., 10$). Így annak a valószínűsége, hogy mindegyik emeleten megáll a lift: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{10})$. Annak a valószínűsége, hogy egy adott emeleten senki sem száll ki, $(9/10)^{15}$, hiszen ilyenkor mindenki 9-féle emelet közül választhat, az összes, egyformán valószínű eset száma pedig 10^{15}. Hasonlóképpen, annak valószínűsége, hogy k adott emeleten senki nem száll ki, $(10-k)^{15}/10^{15}$, ilyenkor mindenki $10-k$-féle emelet közül választhat. Vagyis $\mathbb{P}(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = (10-k)^{15}/10^{15}$, és ebből $S_k^{(10)} = \binom{10}{k} (\frac{9}{10})^{15k}$. Használjuk a Poincaré-formulát:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{10}) = \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \left(\frac{10-k}{10} \right)^{15} \approx 0,954.$$

   Tehát $1 - 0,954 = 0,046$ valószínűséggel áll meg mindenhol a lift.

3. Szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X azt, hogy hányszor kell dobni ahhoz, hogy legyen 4 hatos dobás (tehát például a 3266125632653... dobássorozat esetén $X = 11$.) Adjuk meg X eloszlását.

   Megoldás

   Az X lehetséges értékei: $4, 5, 6 \dots$, és az eloszlása:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{k-4} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^4.$$

   Ugyanis a dobások függetlenek, a valószínűségeket lehet szorozni, és az első $k - 1$ dobás között pontosan 3 darab hatosnak kell lennie, ezért a hatosok helyét $\binom{k-1}{3}$-féleképpen választhatjuk ki (a negyedik hatos mindenképpen a k. dobás).

   Általában, ha 4 helyett r, 1/6 helyett pedig p szerepel, vagyis független p valószínűségű kísérletek közül a k. sikeres helyét kérdezzük, akkor az így kapott eloszlást nevezik negatív binomiális eloszlásnak.

4. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét (itt $1 - 90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt). Adjuk meg X eloszlását!

   Megoldás

   Jelentse $X = k$ azt, hogy a legkisebb kihúzott szám k. Ez $1 - 86$-ig bármelyik szám lehet. Ezek alapján, annak valószínűsége, hogy k a legkisebb:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}},$$

   hiszen az összes lehetőség, ahogyan 90 számból 5 különbözőt tudunk választani, egyformán valószínű, és azokat az eseteket, amikor k a legkisebb kihúzott szám, négy darab, $k+1$ és 90 közötti különböző egész számmal tudjuk jellemezni, ez a maradék négy szám. Ezzel megadtuk X eloszlását, hiszen megadtuk a lehetséges értékeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket is.

5. Tegyük fel, hogy az új internetelőfizetők mindegyike a többiektől függetlenül 20%-a speciális kedvezményt kap. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

   Megoldás

   Legyen X az a valószínűségi változó, mely megadja a speciális kedvezményt kapó ismerőseink számát. Ekkor X binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0,2$ paraméterrel. Így pedig

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathbb{P}(X < 4) = \\
&= 1 - \Big[\binom{10}{0}\Big(\frac{1}{5}\Big)^0\Big(\frac{4}{5}\Big)^{10} + \binom{10}{1}\Big(\frac{1}{5}\Big)^1\Big(\frac{4}{5}\Big)^9 + \binom{10}{2}\Big(\frac{1}{5}\Big)^2\Big(\frac{4}{5}\Big)^8 + \binom{10}{3}\Big(\frac{1}{5}\Big)^3\Big(\frac{4}{5}\Big)^7\Big] \\
&= 1 - \Big[\binom{10}{0}4^{10} + \binom{10}{1}4^9 + \binom{10}{2}4^8 + \binom{10}{3}4^7\Big]\Big(\frac{1}{5}\Big)^{10} = 0,1209.
\end{aligned}
$$

   Általában, ha X binomiális eloszlású:

$$
\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.
$$

6. Négy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után addig, amíg elő nem fordul, hogy a négy dobásból legalább három hatos. Jelölje Y, hogy hányszor kell dobni ehhez. Adjuk meg Y eloszlását.

   Megoldás

   Ha 4 szabályos dobókockával dobunk, akkor annak a valószínűsége, hogy legalább 3 dobás hatos, a következőképpen írható fel:

$$
\mathbb{P}(\text{legalább 3 dobás hatos}) = \mathbb{P}(\text{pontosan 3 dobás hatos}) + \mathbb{P}(\text{pontosan 4 dobás hatos}) = 4 \cdot \frac{5}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{21}{6^4} = 0,0016
$$

   Az $Y = k$ ($k = 1, 2, \ldots$) pontosan akkor, ha az első $k-1$ dobás során mindig kevesebb, mint három hatost dobtunk, ennek valószínűsége $\big(1 - \mathbb{P}(\text{legalább 3 dobás hatos})\big)^{k-1}$, a k. dobás során pedig legalább három hatost dobtunk. Tehát

$$
\mathbb{P}(Y = k) = \Big(1 - \frac{21}{6^4}\Big)^{k-1} \cdot \frac{21}{6^4}
$$

   Vegyük észre, hogy az Y Pascal (geometriai) eloszlású. Az is igaz, hogy annak valószínűsége, hogy egyik dobásnál sem sikerül a legalább három hatos,

$$
1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 0
$$

   a geometriai sor összegképlete alapján. vagy azt is mondhatjuk, hogy $\mathbb{P}(Y \geq k) = \Big(1 - \frac{21}{6^4}\Big)^{k-1} \to 0$.

7. Egy bükkösben a bükkmagoncok négyzetméterenkénti száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 2,5$ db / m^2 paraméterrel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 1 m^2-es mintában

   a) legfeljebb egy, ill.

   b) több, mint három magoncot találunk?

   Megoldás

   Legyen X a bükkmagoncok száma a kijelölt egy négyzetméteres területen. Ekkor $X \sim Poisson(\lambda)$, ahol $\lambda = 2,5$.

   Poisson-eloszlásnál, ha $\lambda > 0$ a paraméter:

$$
\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots
$$

   a) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1 \cdot e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} = (1 + 2,5)e^{-2,5} \approx 0,287$.

   b) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) = 1 - (1 \cdot e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} + \frac{2,5^2}{2} \cdot e^{-2,5} + \frac{2,5^3}{6} \cdot e^{-2,5}) = 1 - \Big(1 + 2,5 + \frac{2,5^2}{2} + \frac{2,5^3}{6}\Big) e^{-2,5} = 0,242$.

8. Egy forgalmas útszakaszon azt figyelik, hogy öt perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. A tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy annak valószínűsége, hogy van ilyen autó, ugyanannyi, mint annak, hogy nincs. A gyorshajtók számát Poisson-eloszlásúnak feltételezve mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt öt perc alatt?

Megoldás

Jelölje X azt, hogy 5 perc alatt hány gyorshajtó van a megfigyelt útszakaszon. A feladat szövege szerint X Poisson-eloszlású, továbbá $\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$. Ezt felhasználva könnyen meghatározhatjuk az eloszlás paraméterét:

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{\lambda^0}{0!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\ln 2.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy pontosan három autó lépi át a sebességkorlátozást:

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{(\ln 2)^3}{3!}\cdot e^{-\ln 2}=\frac{(\ln 2)^3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(\ln 2)^3}{12}\approx 0,028.$$

9. Tegyük fel, hogy az, hogy Péter hány emailt, illetve hány facebook-üzenetet kap egy napon, egymástól független valószínűségi változók. Az emailek száma X, ennek paramétere 5, a facebook-üzenetek száma Y, ennek paramétere 8, és mindkét valószínűségi változó Poisson-eloszlású.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Péter összesen 10 üzenetet kap egy nap alatt a két felületen összesen?

   (b) Milyen eloszlású az egy nap alatt érkező összes üzenet száma, azaz $X+Y$?

   (c) Feltéve, hogy Péter egy nap alatt összesen 10 üzenetet kapott, mennyi a valószínűsége, hogy ebből 5 érkezett emailen, és 5 facebookon?

Megoldás

(a) Ez a (b) speciális esete, elég azt megoldani.

(b) A teljes valószínűség tételét használjuk az $\{X=l\}, l=0,1,2,\ldots$ teljes eseményrendszerre, valamint azt, hogy X és Y függetlenek. Legyen $\lambda=5$ és $\mu=8$. Mivel a Poisson-eloszlás paramétere megegyezik a várható értékével, ezek egyben az X és Y paraméterei is. Ez alapján:

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}(X+Y=k|X=l)\mathbb{P}(X=l)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(Y=k-l)\mathbb{P}(X=l)=\sum_{l=0}^{k}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\lambda^l}{l!}\cdot e^{-\lambda}=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mu^{k-l}\cdot\lambda^l=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!},$$

ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk.

Vagyis $X+Y$ 13 paraméterű Poisson-eloszlású. Ezzel ezt bizonyítottuk be:

Legyenek X és Y független λ, illetve μ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $X+Y$ eloszlása Poisson-eloszlás $\lambda+\mu$ paraméterrel.

(c) A feltételes valószínűség definíciója, illetve az X és Y függetlensége alapján, valamint felhasználva, hogy $X+Y$ Poisson-eloszlású 13 paraméterrel:

$$\mathbb{P}(X=5|X+Y=10)=\frac{\mathbb{P}(X=5,X+Y=10)}{\mathbb{P}(X+Y=10)}=\frac{\mathbb{P}(X=5)\cdot\mathbb{P}(Y=5)}{\mathbb{P}(X+Y=10)}=\frac{\frac{5^5}{5!}\cdot e^{-5}\cdot\frac{8^5}{5!}\cdot e^{-8}}{\frac{13^{10}}{10!}\cdot e^{-13}}=\binom{10}{5}\left(\frac{5}{13}\right)^5\left(\frac{8}{13}\right)^5.$$

10. Egy szövegben a sajtóhibák száma λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A lektor a hibákat egymástól függetlenül p valószínűséggel kijavítja, illetve $1-p$ valószínűséggel nem veszi őket észre.

   (a) Határozzuk meg a megmaradó hibák számának eloszlását.

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó hibák száma páros?

Megoldás

(a) Jelölje N a sajtóhibák számát, ekkor $N\sim Poisson(\lambda)$. Továbbá legyen X a megmaradó hibák száma. Ekkor:

$$\mathbb{P}(X=l)=\sum_{k=l}^{\infty}\mathbb{P}(X=l|N=k)\mathbb{P}(N=k),$$

ahol a teljes valószínűség tételét alaklmaztuk az N lehetséges értékei szerinti teljes eseményrendszerre. Amennyiben $N = k$ adott, akkor az X eloszlása binomiális p paraméterrel. (Ezt úgy is mondhatjuk, hogy feltételesen binomiális eloszlású.) Tehát:

$$\mathbb{P}(X = l) = \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} (1-p)^l p^{k-l} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{l!} (1-p)^l e^{-\lambda} \lambda^l \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{(k-l)!} (p\lambda)^{k-l}$$

$$\mathbb{P}(X = l) = \frac{1}{l!} (1-p)^l e^{-\lambda} \lambda^l e^{\lambda p} = \frac{((1-p)\lambda)^l}{l!} e^{-\lambda(1-p)}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $X \sim Poisson(\lambda(1-p))$.

(b) Az eloszlás ismeretében könnyen meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy X páros. Felismerve a hiperbolikus koszinusz Taylor-sorát:

$$\mathbb{P}(X \text{ páros}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda(1-p)} = \cosh((1-p)\lambda) \cdot e^{-\lambda(1-p)}$$