Valószínűségszámítás, 2. feladatsor, 2022. szeptember 19-23.

1. Kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?

   Megoldás

   Mivel X a nagyobb rész hosszát jelöli, ezért $\frac{1}{2} \leq X < 1$, tehát a keresett valószínűség a következőképpen adható meg:

$$\mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2x - 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

   Ugyanis a szimmetria miatt feltehetjük, hogy az osztópont az $(1/2, 1)$ intervallumba esik, ezen belül pedig a nagyobb rész hossza pontosan akkor lesz x-nél kisebb, ha az osztópont $1/2$ és x közé esik, vagyis egy $x - 1/2$ hosszú intervallum lesz megfelelő egy $1/2$ hosszú intervallumon belül, és feltéve, hogy a pontot egyenletes eloszlás szerint választottuk, a valószínűségeket az intervallum hosszával arányosan számíthatjuk ki. Másképpen: akkor lesz $X < x$, ha az osztópont $1 - x$ és x közé esik, vagyis egy $2x - 1$ hosszú intervallum megfelelő a teljes 1 hosszú intervallumból.

   Hasonlóképpen, mivel Y a kisebb rész hosszát jelöli, ezért $0 < Y \leq \frac{1}{2}$, vagyis:

$$\mathbb{P}(Y < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

2. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két találomra választott pontjával három részre osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszokból szerkeszthető háromszög?

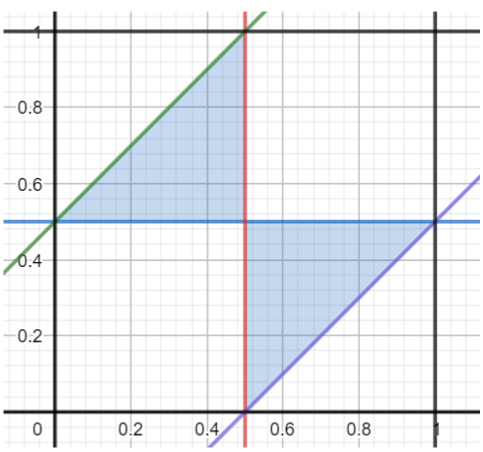
   Megoldás

   Használjuk a következő jelöléseket: a vizsgált esemény legyen A, a szakasz egyik végpontjának a távolságát a kiválasztott pontoktól jelölje x és y. Ekkor a két pont kiválasztása megfeleltethető azzal, hogy az egységnégyzetből szeretnénk kiválasztani egy (x, y) pontot.

   A három szakasz pontosan akkor lehet egy háromszög három oldala, ha közülük bármelyik kettőnek a hossza nagyobb, mint a harmadik hossza. 2 esetet kell megkülönböztetni:

   - Ha $x < y$, akkor a 3 szakasz: x, $y - x$, $1 - y$. Ahhoz, hogy ezekből a szakaszokból háromszöget tudjunk alkotni, a következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülni:
     (i) $x + y - x > 1 - y$, azaz $y > \frac{1}{2}$
     (ii) $x + 1 - y > y - x$, azaz $x + \frac{1}{2} > y$
     (iii) $y - x + 1 - y > x$, azaz $\frac{1}{2} > x$
   - Ha $y > x$, akkor az x és y szerepcseréjével a következő egyenlőtlenségek adódnak:
     (i) $x > \frac{1}{2}$
     (ii) $y + \frac{1}{2} > x$
     (iii) $\frac{1}{2} > y$

   Azon pontok, melyek a két egyenlőtlenség rendszer egyikét kielégítik az ábra beszínezett részébe esnek. Ez a terület $\frac{1}{4}$, és mivel az egységnégyzet területe 1, ezért $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$.



3. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

Megoldás

Legyen A esemény az, hogy mindkét dobás hatos, B pedig, hogy legalább az egyik hatos. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11} > \mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}.$$

Összesen 36 egyformán valószínű lehetőség van, ebből 1, amikor mindkét esemény van, és 11, amikor legalább az egyik hatos.

4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?

Megoldás

A: van legalább egy hatos; B: különböző számokat dobtunk.

Összes lehetőség: 6^3, a dobókocka szabályossága és a szimmetria miatt ezek egyformán valószínűek, alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó összefüggést.

Bár ez nem volt kérdés, mivel 5^3 olyan lehetőség van, amiben nincs hatos:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 42,1\%.$$

Másrészt annak valószínűsége, hogy minden dobás különböző, azaz eltér az előzőektől:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{120}{6^3} = 55,5\%.$$

Továbbá a B-n belül azok a rossz esetek, amikor hatos sincs, a számok pedig egymástól is eltérnek:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{60}{6^3} = 27,8\%.$$

Összességében az A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{60}{6^3}}{\frac{120}{6^3}} = \frac{1}{2} = 50\% > \mathbb{P}(A) = 42,1\%.$$

Másképpen: úgy is gondolkozhatunk, hogy melyik három különböző számot dobtunk, ez $\binom{6}{3}$ egyformán valószínű eset. Ebből $\binom{5}{2}$ olyan, amikor van hatos. Tehát

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}.$$

5. Ákos feldob egy érmét ötvenszer, Bálint ötvenegyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint több fejet dob, mint Ákos?

Megoldás

Tekintsük Ákos összes dobását, Bálint első ötven dobását, és a következő három eseményt (most tehát csak $50-50$ dobás számít:

A: Ákos több fejet dobott, mint Bálint;

B: Bálint több fejet dobott, mint Ákos;

C: Ákos és Bálint ugyanannyi fejet dobtak.

Itt A, B, C teljes eseményrendszert alkotnak, hiszen közülük pontosan az egyik következik be. Legyen D a kérdéses esemény, vagyis az, hogy a játék végéig Bálint több fejet dob, mint Ákos. Észrevehetjük, hogy D-nek az A-ra, B-re, C-re vonatkozó feltételes valószínűségei könnyen kiszámíthatók: 0, 1, illetve 1/2, hiszen az első két esetben a plusz egy dobás nem változtat a helyzeten, a harmadik esetben az utolsó dobás dönti el, hogy ki dob több fejet. Ezért a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}.$$

Ugyanis a szimmetria miatt A és B valószínűsége megegyezik, mivel pedig A, B, C teljes eseményrendszer, a valószínűségük összege 1.

6. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy eltalálja a helyes választ, ekkor $\frac{1}{3}$). Mennyi a valószínűsége, hogy helyesen válaszol? Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy helyesen válaszolt, B_1 azt, hogy tudta a választ, illetve B_2, hogy nem tudta a választ. Itt B_1, B_2 komplementer események, közülük pontosan az egyik következik be, vagyis teljese eseményrendszert alkotnak. Ekkor:

$$P(B_1) = p; \qquad P(A|B_1) = 1$$
$$P(B_2) = 1 - p; \qquad P(A|B_2) = \frac{1}{3}$$

Alkalmazva a teljes valószínűség tételét az A eseményre és a $\{B_1, B_2\}$ teljes eseményrendszerre:

$$\mathbb{P}(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1 - p).$$

Alkalmazva a Bayes-tételt a $\{B_1, B_2\}$ teljes eseményrendszerre és az A pozitív valószínűségű eseményre:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$

7. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A betegség kimutatására szolgáló teszt beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, ugyanakkor az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.

(a) Egy véletlenszerűen választott embernél elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt betegséget jelez?

(b) Tamásnál elvégezték a tesztet, az eredmény szerint beteg. Mennyi a feltételes valószínűsége, hogy valóban beteg?

(c) Megismételték a vizsgálatot. Az újabb tesztnél ismét betegséget jelzett a teszt. A két eredmény alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Tamás beteg? Itt feltehetjük, hogy annak valószínűsége, hogy egy ember vizsgálata esetén mindkétszer betegséget jelez a teszt, annak négyzete, hogy egy alkalommal betegséget mutat ki a teszt.

Megoldás

Az (a) esetben alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét arra a teljes eseményrendszerre, hogy a vizsgált ember beteg (B), illetve egészséges (E). Ezek közül pontosan az egyik következik be, ezért valóban teljes eseményrendszert alkotnak. Azt az eseményt, hogy a teszt betegséget jelez, jelöljük +-szal.

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(+|E)\mathbb{P}(E) = 0,02 \cdot 0,95 + 0,98 \cdot 0,01 = 0,0288.$$

A (b) esetben ezután számolhatunk a feltételes valószínűség definíciójával, illetve az (a)-ban kapott eredménnyel. . Így az alábbit kapjuk:

$$\mathbb{P}(B|+) = \frac{\mathbb{P}(B \cap +)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{\mathbb{P}(+|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{0,02 \cdot 0,95}{0,02 \cdot 0,95 + 0,98 \cdot 0,01} = 0,66.$$

Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy a Bayes-tételt használjuk a $\{B, E\}$ teljes eseményrendszerre és arra az eseményre, hogy a teszt betegséget jelez)

A (c) esetben hasonlóképpen számolhatunk, csak azt kell figyelembe vennünk, hogy betegség, illetve esetén hogyan alakul a két pozitív tesztnek a feltételes valószínűsége, ezt azonban a feladat meghatározza.

$$\mathbb{P}(B|++) = \frac{\mathbb{P}(++|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(++)} = \frac{0,02 \cdot 0,95 \cdot 0,95}{0,02 \cdot 0,95 \cdot 0,95 + 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,01} = 0,9946.$$

8. Egy dobozban egy jó és egy rossz kábel van. A jó 95% valószínűséggel, a rossz 30% valószínűséggel működik minden kipróbálásnál függetlenül. Találomra kivesszük valamelyik kábelt (mindkettőt azonos valószínűséggel választva). Tízszer kipróbáltuk, ebből nyolcszor működött, kétszer nem. Mennyi a valószínűsége, hogy a jó kábelt vettük ki a dobozból?

Megoldás

Legyen A az az esemény, hogy a jó kábelt vettük ki a dobozból, B az az esemény, hogy ez a kábel tíz kísérletből pontosan nyolcszor működött.

Ha a jó kábelt próbálgatjuk, annak valószínűsége, hogy tízből pontosan nyolcszor működik, $\binom{10}{8} \cdot 0,95^8 \cdot 0,05^2$, hiszen $\binom{10}{8}$-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik nyolc alkalommal működik, ezután pedig a függetlenség miatt a valószínűségek szorzatával számolhatunk. Hasonló számolás igaz a rosszabb kábelnél. Így a Bayes-formula alapján:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\binom{10}{8} \cdot 0,95^8 \cdot 0,05^2 \cdot 0,5}{\binom{10}{8} \cdot 0,95^8 \cdot 0,05^2 \cdot 0,5 + \binom{10}{8} \cdot 0,3^8 \cdot 0,7^2 \cdot 0,5} = 0,981.$$