# Valószínűségszámítás gyakorlat

## 1. (1. hét) Kombinatorikus valószínűségi mező

### Feladatok

**1.1. Feladat.** Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

**Megoldás**

Az első bástya 64 helyre kerülhet. Ekkor a lefedett mező sorába és oszlopába már nem kerülhet újabb bástya, így a következőt már csak 7 sor és 7 oszlop valamelyikébe tehetjük le, ami 49 lehetőség. Minden újabb bástya letételével még egy újabb sor és oszlop kerül lefedésre. Tehát ezután sorra $36, 25, 16, 9, 4,$ és 1 lehetőség van a következő bástyák letételére. Viszont a bástyák letevésének sorrendjét így figyelembe vettük, pedig mind a 8 bástya egyforma, külsőleg nem megkülönböztethető. Így le kell osztanunk a lerakott bástyák permutációinak számával, azaz 8!-sal. Tehát összesen $\frac{64\cdot49\cdot36\cdot25\cdot16\cdot9\cdot4\cdot1}{8!} = 40320 = 8!$ féleképp tehetjük le a bástyákat. A végeredményt közvetlenül is megkaphatjuk, ha oszloponként (ill. soronként) nézzük a bástyák helyét: az első sorban lévő bástya 8-féle helyen lehet, és bárhová került, a második sorban lévő bástya hétféle helyre kerülhet, ez eddig 56 lehetőség. Ezt a többi sorral folytatva adódik a 8!.

**1.2. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

**Megoldás**

Az első számjegyet az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek közül, a többi számjegyet a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számjegyek közül választhatjuk. Így az összes esetek száma $9 \cdot 10^5$, és mivel nincs ettől eltérő feltétel, ezek az esetek egyformán valószínűek. A kedvező esetek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, mert itt visszatevés nélkül választunk, a sorrend számít, illetve arra figyelünk, hogy az első számjegy ne lehessen 0. Tehát a keresett valószínűség $\frac{9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{9\cdot10^5} = \frac{136080}{900000} = 0{,}1512$.

**1.3. Feladat.** Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

**Megoldás**

a) A 3 kihúzott lap közül $\binom{3}{1} = 3$-féleképp dönthetjük el, hogy melyik legyen a piros színű. Ezután feltehető, hogy az első húzott lap piros, a többi nem. Mivel visszatevéses mintavétel, ezért piros lap húzásának valószínűsége mindig $\frac{8}{32}$, nem piros lap húzásának valószínűsége pedig $\frac{24}{32}$. Tehát a keresett valószínűség: $\binom{3}{1} \cdot (\frac{8}{32})^1 \cdot (\frac{24}{32})^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64} = 0{,}4219$.

b) Kényelmesebb most a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: nincsen piros a húzott lapok között. Ennek valószínűsége $\binom{3}{0} \cdot (\frac{8}{32})^0 \cdot (\frac{24}{32})^3 = \frac{27}{64}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0{,}5781$.

**1.4. Feladat.** Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

**Megoldás**

a) 10 balos és 10 jobbos cipő van. Mi a valószínűsége, hogy a 4 kihúzott között van balos és jobbos is? Célszerű most is a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: vagy 4 balosat húztunk, vagy 4 jobbosat. Ennek valószínűsége: $2 \cdot \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{20\cdot19\cdot18\cdot17} = \frac{28}{323}$ vagy $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{28}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{28}{323} = 0{,}9133$.

b) Most is érdemes a komplementer esemény valószínűségét kiszámítani. Komplementer esemény: nincs pár a 4 cipő között. Ha így akarom a cipőket kiválasztani, akkor az elsőt 20-féleképp választhatom ki, a másodikat 18-féleképp (az első és párja kiesik), a harmadikat 16-féleképp és a negyediket 14-féleképp. Összes eset: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{20\cdot19\cdot18\cdot17} = \frac{224}{323}$ vagy kiválasztunk 10 párból a 4 párat először, majd ezek balosát ill. jobbosát $\frac{\binom{10}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{224}{323} = 0{,}3065$.

**1.5. Feladat.** Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

**Megoldás**

A 10 gépből 3 felújított, 7 új. Tehát a 3 felújított gép közül kell 2-t kiválasztani, illetve a 7 új gép közül kell a maradék 3-mat kiválasztani. A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe sem a kedvező esetek, sem az összes eset számításánál. Így a kedvező esetek száma: $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105$, hiszen az első tényező megmondja, hogy hányféleképpen tudjuk a két felújított gépet választani, a második, hogy hányféleképpen tudjuk a három újat kiválasztani, és bármelyik lehetőség bármelyikkel összeilleszthető, ezért kapjuk szorzással az összes lehetőséget. Az összes eset száma az öt gép összes lehetséges kiválasztásának száma: $\binom{10}{5} = 252$. Tehát a keresett valószínűség $\frac{105}{252} = 0{,}4167$.

**1.6. Feladat.** Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

**Megoldás**

$\binom{6}{3} = 20$-féleképp lehet a 6 karakterből a 3 szám helyét kiválasztani. Ezután feltehető, hogy az első 3 karakter szám, az utolsó 3 karakter betű, hiszen annak valószínűsége, hogy a kiválasztott három helyre szám, a többi helyre betű kerül, ugyanaz, bárhova is tettük a számok helyét. Számjegy választásának valószínűsége $\frac{10}{36}$, betűé $\frac{26}{36}$. A keresett valószínűség tehát $\binom{6}{3} \cdot (\frac{10}{36})^3 \cdot (\frac{26}{36})^3 = 0{,}1615$.

**1.7. Feladat.** Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez utóbbi a visszatevéses esethez?) A lottóhúzásnál $1-90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül.

**Megoldás**

Az összes lehetőség száma $\binom{90}{5}$, ennyiféleképpen lehet a kihúzott számokat kiválasztani. Ezek az esetek mind egyformán valószínűek. Az előző feladat mintájára számolhatunk.

Annak a valószínűsége, hogy ötösünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{5}}$, hiszen ilyenkor csak egy eset jó.

Annak a valószínűsége, hogy legalább négyesünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros: $\frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0,028$.

A visszatevéses esetben (tehát, mikor egy számot többször is kihúzhatunk) annak a valószínűsége, hogy párosakat húzunk: $\left(\frac{45}{90}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031$. Bár a két érték közel van egymáshoz, a visszatevés nélküli esetben kisebb a valószínűség. Ez azzal is indokolható, hogy ha elsőre sikerült párosat húzni, a visszatevés nélküli esetben a második húzásnál $1/2$ valószínűséggel húzunk újra páros számot, a visszatevés nélküli esetben már csak $44/89 < 1/2$ valószínűséggel, és ez a gondolatmenet a többi három húzásra is elmondható.

**1.8. Feladat.** Egy db. lottó szelvénnyel játszva mennyi az esélye annak, hogy telitalálatunk lesz, négy, három ill. két találatot érünk el?

**Megoldás**

A lottóhúzás lehetséges kimeneteleinek halmaza (azaz az eseménytér) az $\{1, 2, \ldots, 90\}$ számhalmaz 5 elemű részhalmazainak családja. Szimmetria okok miatt mindegyik kimenetel egyformán valószínű. Ha $X$ jelöli a találataink számát, akkor

$$P(X = k) = \frac{\text{azon 5 elemű részhalmazok száma, amik az általunk bejelölt számok közül } k \text{ db-t tartalmaznak}}{\text{az 5 elemű részhalmazok száma}} = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

**1.9. Feladat.** Melyik módszerrel nagyobb a telitalálat esélye, ha egy héten játszunk meg két különböző számötöst vagy ha kétszer egymás után ugyanazt?

**Megoldás**

Az első esetben a telitalálat esélye $\frac{2}{\binom{90}{5}}$, hiszen két jó számötös van az összes lehetséges számötös közül, míg a második esetben számolhatunk a komplementerrel, vagy úgy, hogy összeadjuk a két héten a telitalálat valószínűségét, és levonjuk annak valószínűségét, hogy mindkét héten telitalálatunk volt:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^2 = \frac{1}{\binom{90}{5}} + \frac{1}{\binom{90}{5}} - \frac{1}{\binom{90}{5}^2} < \frac{2}{\binom{90}{5}}.$$

Ugyanis annak valószínűségét, hogy telitalálatunk lesz, kiszámolhatjuk abból kiindulva, hogy az egyes heteken külön-külön mennyi ennek az esélye, de kétszer számoltuk azt, amikor mindkétszer telitalálatunk lett. Ennek valószínűségét le kell vonni, és mivel ez az első esetben nem is fordulhat elő, így kapjuk a kisebb értéket.

**1.10. Feladat.** X. úr szenvedélyes lottózó, 50 éven át minden héten heti 10 lottószelvénnyel játszott úgy, hogy minden héten csupa különböző számot jelölt meg (összesen tehát ötvenet a kilencvenből). Milyen esélye volt arra, hogy valaha is telitalálatot érjen el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer legalább négyes találatot elért? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden évben 52 hét volt.)

**Megoldás**

$X$. úr egy héten 10 szelvénnyel játszik, és mivel különbözőek a számok, számára 10 kedvező számötös van, így a nyerésének esélye $\frac{10}{\binom{90}{5}}$ minden héten.

Annak valószínűsége, hogy egyszer sem nyer, ennek alapján $\left(1-\frac{10}{\binom{90}{5}}\right)^{50\cdot 52}$, hiszen az $50\cdot 52$ hét egyikén sem nyer ebben az esetben. Így annak valószínűsége, hogy valamikor telitalálata lesz:

$$1-\left(1-\frac{10}{\binom{90}{5}}\right)^{50\cdot 52}=0,00059$$

A négyes találat valószínűsége egy szelvényen $\frac{\binom{5}{4}\cdot 85}{\binom{90}{5}}$. Az előzőhöz hasonlóan (mert nem lehet egyszerre több szelvényen négyese) annak valószínűsége, hogy valamelyik szevényén négyes találata lesz: $10\frac{\binom{5}{4}\cdot 85}{\binom{90}{5}}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer legalább négyes találata lesz:

$$1-\left(1-10\frac{5\cdot 85+1}{\binom{90}{5}}\right)^{50\cdot 52}=0,223.$$

**1.11. Feladat.** Ha egy kockával négyszer dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy a négy dobásból lesz legalább egy hatos. Ha két kockával huszonnégyszer dobunk akkor hátrányos arra fogadni, hogy lesz legalább egy dupla hatos, holott $4/6=24/36$-dal (vagyis a dobások számának és a kedvező kimenetel esélyének szorzata megegyezik). Magyarázzuk meg a jelenséget! (A fogadás kedvező ill. hátrányos aszerint, hogy a nyerés esélye meghaladja-e $1/2$-et.)

**Megoldás**

Egy kockával négyszer dobva annak valószínűsége, hogy lesz legalább egy hatos, a komplementer esemény valószínűségével számolva:

$$\mathbb{P}(\text{négy dobásból legalább egy hatos})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=51,77\%.$$

Két kockával huszonnégyszer dobva annak valószínűsége, hogy lesz legalább egy dupla hatos, hasonlóképpen számolva:

$$\mathbb{P}(\text{huszonnégy dobásból legalább egy dupla hatos})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=49,14\%.$$

A valószínűséget tehát nem a dobások számának és a kedvező kimenetel valószínűségének szorzata adja meg, ez az érték, vagyis $4\cdot 1/6$, illetve $24\cdot 1/36$ azoknak a valószínűségeknek az összege, hogy az egyes dobásoknál külön-külön hatost, illetve dupla hatost kapunk. Azonban, például az első esetben, annak valószínűsége, hogy van négyes, kisebb, mint ez az összeg, hiszen az a négy esemény, hogy az első, második, harmadik, negyedik dobás hatos, nem diszjunkt, ezek egyszerre is bekövetkezhetnek, aminek a valószínűségét (illetve egy ennek megfelelő mennyiséget) le kell vonni. Hasonlóképpen, a második esetben, a $24\cdot 1/36$ értékből le kell vonni még valamit amiatt, hogy egyszerre több dobásnál is lehet dupla hatos. Mivel pedig a második esetben ez a helyzet könnyebben előáll, hiszen a 24 dobást négy részre bontva az egyes négyeseken belül is lehet kétszer dupla hatos, aminek nincs megfelelője az első esetben, többet vonunk le, és kisebb értéket kapunk végeredményül (ez nem egy bizonyítás, csak heurisztikus magyarázat).

**1.12. Feladat.** A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

**Megoldás**

A kérdés ekvivalens azzal, hogy 10 embert kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két csatárt választottunk ki. A kettéosztásnál ugyanis nem különböztetjük meg a „kiválasztott” és „maradék” sportolókat, de minden kettéosztásból kétféleképpen tudunk „kiválasztott” csoportot létrehozni, vagyis a kedvező és összes eset száma is megduplázódik, a valószínűség ugyanaz lesz.

Tíz embert kiválasztani $\binom{20}{10}$-féleképpen lehetséges. Ebből olyan eset, amikor a kiválasztottak között pontosan két csatár van, $\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{8}$ van, hiszen meg kell mondanunk, hogy melyik két csatár kerül ide, meg kell mondani, hogy a többi 16 játékos közül ki az a nyolc, aki bekerül, és a csatárok választása bárhogyan kombinálható a többiek választásával, ezért lehet szorozni a kettőt. Összesen tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{8}}{\binom{20}{10}}=41,8\%.$$

**1.13. Feladat.** Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

(a) több a páros, mint a páratlan?

(b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek?

**Megoldás**

(a) Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám van, és a számok szerepe ugyanolyan, annak valószínűsége, hogy több a páros, mint a páratlan, ugyanannyi, mint annak valószínűsége, hogy több a páratlan, mint a páros. Mivel öt számot húzunk, az nem lehet, hogy ugyanannyi páros legyen, mint páratlan. Ezért a kérdéses valószínűség $1/2$.

(b) Bármi is az öt kihúzott szám, $5! = 120$-féle sorrendben lehet őket kihúzni, és minden sorrend egyformán valószínű a szimmetria miatt. A 120-féle lehetséges sorrend közül egy az, amikor a húzás sorrendjében növekvők. Ezért a kérdéses valószínűség

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,83\%.$$

Másképpen, ha sorrenddel számolunk, minden számötöshöz egy jó sorrend tartozik, ezért:

$$\frac{\binom{90}{5}}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{5!}$$