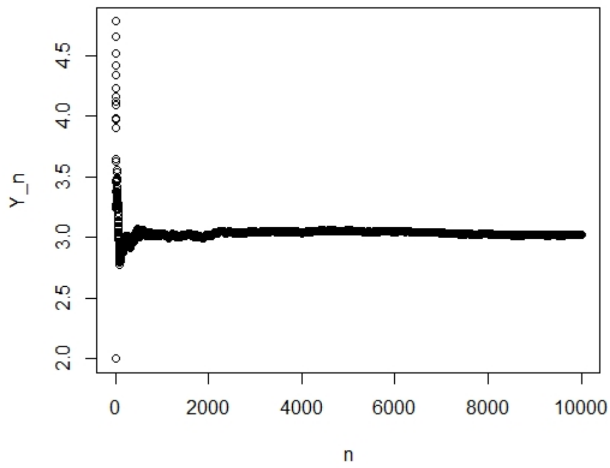

1. ábra. A dobások mértani közepének sorozata

Valószínűségszámítás, 8. feladatsor, 2022. november 14-18.

(1) Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?

Megoldás

Emlékeztető: $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1)$$

teljesül 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Ez a **nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye**.

A mértani közép, ha $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ a dobások:

$$\sqrt[n]{X_1 X_2 \ldots X_n}$$

Legyen X_i : i-edik kockadobás és $Y_n = \sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$.Ekkor

$$Y_n = e^{\ln(Y_n)} = e^{\frac{1}{n}(\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n))} \longrightarrow e^{\mathbb{E}(\ln(X_1))}$$

1 valószínűséggel.

Itt $\ln X_1, \ln X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, a várható értékük véges, erre alkalmazhatjuk a nagy számok erős törvényét.

$$\mathbb{E}(\ln(X_1)) = \frac{1}{6}(\ln(1) + \cdots + \ln(6)) = \frac{\ln 6!}{6}$$

Ezután azt használtuk, hogy az exponenciális függvény folytonos.

Mindebből $Y_n \longrightarrow \sqrt[6]{6!}$

(2) Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely sztochasztikusan konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens (ebből következik, hogy nem 1 valószínűséggel konvergens).

A valószínűségi mező legyen a $[0, 1]$ intervallum a Borel-halmazokkal és rajta a Lebesgue-mértékkel.

A valószínűségi változókat, melyek tehát $X_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvények, csoportokban definiáljuk, az egyes csoportok mérete $2, 4, 8, 16, \ldots$, azaz a 2-hatványok. A k. csoporthoz bontsuk fel a $[0, 1]$ intervallumot 2^k egyforma hosszú intervallumra (minden pontot pontosan egyszer fedve le), és a k. csoporton belül a j. valószínűségi változó legyen a j. kis intervallum indikátora (1 az intervallumon belül, 0 azon kívül).

Minden $\omega \in [0, 1]$ szám (elemi esemény) minden k-ra valamelyik kis intervallumba esik, így minden k-ra az adott 2^k nagyságú csoport tagjai közül egy esetben 1, a többi esetben 0 lesz az érték, vagyis $X_n(\omega)$. Ebből következik, hogy $X_n(\omega)$ végtelen sokszor veszi fel az 1 és a 0 értékeket is, tehát nem konvergens. Így a sorozat 0 valószínűséggel konvergens.

Másrészt minden $0 < \varepsilon < 1$-ra $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \to 0$, hiszen ez a valószínűség éppen annak az intervallumnak a hossza, amelynek X_n az indikátora, ez pedig a k. csoportban $1/2^k$ volt, így 0-hoz tart.

Tehát a megadott sorozat sztochasztikusan tart a 0-hoz (és L^1-ben is), de nem konvergál 1 valószínűséggel.

Másik példa: független, nullához tartó, de végtelen összegű valószínűségű események indikátorainak a sorozata (a Borel–Cantelli-lemma használható arra, hogy belássuk, hogy ezek közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik).

(3) Számítsuk ki az alábbi együttes sűrűségfüggvények marginálisait! Mely esetekben független ξ, η?

(a) $f(x, y) = 4xy$, $x, y \in [0, 1]$, 0 egyébként.

(b) $f(x, y) = 1/\pi$, ha (x, y) a $\mathbb{R}^2$ egységkörlapjába esik, 0 egyébként.

(c) $f(x, y) = 2$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $x \le y$, különben 0.

(d) $f(x, y) = 6(x - y)$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $y \le x$, különben 0.

Megoldás.

a) Itt $f(x, y) = 2x\mathbb{I}(x \in [0, 1]) \cdot 2y\mathbb{I}(y \in [0, 1])$, így ξ és η függetlenek, és mindkettő azonos eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

b) Az első marginális, ha $x \in [-1, 1]$:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2\sqrt{1 - x^2}}{\pi}.$$

Ezen kívül 0 a sűrűségfüggvény. A másik marginális a szimmetria miatt pontosan ugyanez lesz. A sűrűségfüggvény nem lehet szorzat alakú, mert akkor az $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten mindenhol pozitív lenne az értéke, de ez csak az egységkörön teljesül. Ezért a két valószínűségi változó nem független egymástól.

c) Az első marginális:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{x}^{1} 2\, dy = 2(1 - x),$$

ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben.

A második marginális:

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_{0}^{y} 2\, dx = 2y,$$

ha $0 \le y \le 1$, és 0 különben. A sűrűségfüggvény nem lehet szorzat alakú, mert akkor a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten mindenhol pozitív lenne az értéke, de ez csak az egységkörön teljesül. Ezért a két valószínűségi változó nem független egymástól.

d) Az első marginális:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{x} 6(x - y)\, dy = 6x^2 - 3x^2 = 3x^2,$$

ha $0 \le x \le 1$.

A második marginális:

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_{y}^{1} 6(x - y)\, dx = 3(1 - y^2) - 6y^2 = 3 - 9y^2,$$

ha $0 \le y \le 1$, és 0 különben.

Látható, hogy az együttes sűrűségfüggvény nem a marginálisok szorzata, a két valószínűségi változó nem független egymástól.

(4) Legyen η egy alkatrész eltérése a szabványostól, legyen ξ az élettartama. Az előbbit meg tudjuk mérni, az utóbbi majd a jövőben derül ki, de már most meg szeretnénk mondani a várható értékét.

A változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) := e^{-|y|x}y^2,\ 0 \le x,\ -1 \le y \le 1.$$

Határozzuk meg a hiba (eltérés) sűrűségfüggvényét ($f_\eta(y) = |y|$ lesz), valamint az élettartam feltételes sűrűségfüggvényét rögzített y mellett (ez $f_{\xi|\eta=y} = e^{-|y|x}|y|$, vagyis ξ feltételes eloszlása a $\eta = y$ feltétel mellett éppen $|y|$ paraméterű exponenciális, ha $y \neq 0$, $y = 0$-ban a feltételes sűrűségfüggvényt 0-nak definiáljuk). Mi lesz a feltételes várható érték? (Nyilván $E(\xi|\eta = y) = \frac{1}{|y|}$, azaz minél kisebb a hiba, annál nagyobb az élettartam.) Érdekes lehet megnézni (csillagos feladat) a ξ szerinti marginális sűrűségfüggvényt is.

(5) Számítsuk ki az Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett, valamint a feltételes várható értéket is az alábbi esetekre:

(a) $f(x,y) = 4xy,\ x,y \in [0,1]$, 0 egyébként.
(b) $f(x,y) = 1/\pi$, ha (x,y) a $\mathbb{R}^2$ egységkörlapjába esik, 0 egyébként.
(c) $f(x,y) = 2$, ha $x,y \in [0,1]$ és $x \le y$, különben 0.
(d) $f(x,y) = 6(x-y)$, ha $x,y \in [0,1]$ és $y \le x$, különben 0.

Megoldás:

(a) Mivel X és Y függetlenek, ezért $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) = 2y$ (ha $y \in [0,1]$) és $E(Y|X=x) = E(Y) = \int_0^1 2y^2 dy = 2/3$.
(b) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ az egységkörlapon. $E(Y|X=x) = 0$, mert egyenletes eloszlás egy, a 0-ra szimmetrikus intervallumon.
(c) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)}$ $x,y \in [0,1]$ és $x \le y$, különben 0. Ebből $E(Y|X=x) = \int_x^1 \frac{2y}{2(1-x)}dy = \frac{1-x^2}{2(1-x)} = (1+x)/2$, ha $x \in [0,1]$.
(d) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6(x-y)}{\int_0^x 6(x-y)dy} = \frac{6(x-y)}{3x^2}$ ha $x,y \in [0,1]$ és $x \le y$. Ebből $E(Y|X=x) = \int_0^x \frac{6y(x-y)}{3x^2}dy = \frac{x^3}{3x^2} = (x)/3$, ha $x \in [0,1]$.

(6) Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$, ha $x,y \in (0,\pi/2)$, és 0 máshol. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

(7) Legyenek X és Y független λ illetve μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(\max(X,Y)|\min(X,Y))$ feltételes várható értéket.

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $\max(X,Y) = X + Y - \min(X,Y)$.