Valószínűségszámítás, 8. feladatsor, 2022. november 14-18.

(1) Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?

(2) Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely sztochasztikusan konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens (ebből következik, hogy nem 1 valószínűséggel konvergens).

(3) Számítsuk ki az alábbi együttes sűrűségfüggvények marginálisait! Mely esetekben független ξ, η?

(a) $f(x, y) = 4xy$, $x, y \in [0, 1]$, 0 egyébként.
(b) $f(x, y) = 1/\pi$, ha (x, y) a $\mathbb{R}^2$ egységkörlapjába esik, 0 egyébként.
(c) $f(x, y) = 2$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $x \leq y$, különben 0.
(d) $f(x, y) = 6(x - y)$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $y \leq x$, különben 0.

(4) Legyen η egy alkatrész eltérése a szabványostól, legyen ξ az élettartama. Az előbbit meg tudjuk mérni, az utóbbi majd a jövőben derül ki, de már most meg szeretnénk mondani a várható értékét.

A változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) := e^{-|y|x} y^2, \; 0 \leq x, \; -1 \leq y \leq 1.$$

Határozzuk meg a hiba (eltérés) sűrűségfüggvényét ($f_\eta(y) = |y|$ lesz), valamint az élettartam feltételes sűrűségfüggvényét rögzített y mellett (ez $f_{\xi|\eta=y} = e^{-|y|x}|y|$, vagyis ξ feltételes eloszlása a $\eta = y$ feltétel mellett éppen $|y|$ paraméterű exponenciális, ha $y \neq 0$, $y = 0$-ban a feltételes sűrűségfüggvényt 0-nak definiáljuk). Mi lesz a feltételes várható érték? (Nyilván $E(\xi|\eta = y) = \frac{1}{|y|}$, azaz minél kisebb a hiba, annál nagyobb az élettartam.) Érdekes lehet megnézni (csillagos feladat) a ξ szerinti marginális sűrűségfüggvényt is.

(5) Számítsuk ki az Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett, valamint a feltételes várható értéket is az alábbi esetekre:

(a) $f(x, y) = 4xy$, $x, y \in [0, 1]$, 0 egyébként.
(b) $f(x, y) = 1/\pi$, ha (x, y) a $\mathbb{R}^2$ egységkörlapjába esik, 0 egyébként.
(c) $f(x, y) = 2$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $x \leq y$, különben 0.
(d) $f(x, y) = 6(x - y)$, ha $x, y \in [0, 1]$ és $y \leq x$, különben 0.

(6) Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$, ha $x, y \in (0, \pi/2)$, és 0 máshol. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

(7) Legyenek X és Y független λ illetve μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(\max(X, Y)|\min(X, Y))$ feltételes várható értéket.