Valószínűségszámítás, 7. feladatsor, 2022. november 7-11.

(1) Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek. Milyen értelemben konvergensek az alábbi sorozatok, és mi a limeszük?

(a) X_i független p paraméterű indikátorváltozó; $Y_n = (X_1^5 + \ldots + X_n^5)/n$.

(b) X_i az i. szabályos kockadobás eredménye; $Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$; illetve $Z_n = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$.

(c) X_i exponenciális eloszlású 2 paraméterrel (azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{I}(x > 0)$; $Y_n = (e^{X_1} + \ldots + e^{X_n})/n$, illetve $Z_n = \frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n}$.

(2) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen x^{-5}, ha $x > c$, és 0 különben.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Feltéve, hogy $X > 2c$, mennyi a valószínűsége, hogy $X > 3c$?

(c) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ az X-szel azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\frac{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}{n}$$

limeszét sztochasztikus, illetve 1 valószínűségű értelemben, ha ezek a limeszek léteznek $n \to \infty$ esetén.

(3) Tegyük fel, hogy egy biztosító ügyfelei minden napon a többitől függetlenül 50 várható értékű Poisson-eloszlással leírható számú balesetet szenvednek. Legyen X_j a j. napon okozott károk száma.

Határozzuk meg az

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}$$

határértékeket, azzal együtt, hogy milyen értelemben léteznek ezek a határértékek.

(4) Az USA-ban a férfiak átlagos magassága 176 cm, 7 cm szórással (tegyük fel, hogy a testmagasság közelíthető normális eloszlással). Mekkora az esélye, hogy valaki 2 méternél magasabb? Adjunk meg egy olyan D számot, melyre igaz, hogy a férfiak 95%-ának magassága $176 - D$ és $176 + D$ közé esik!

(5) Egy átlagos magyar háztartásban $100m^3$ víz fogy évente, $20m^3$ szórással. Ha 3×10^6 háztartás van Magyarországon, akkor mekkora az esélye, hogy a $3,3 \times 10^8 m^3$ rendelkezésre álló vízkészlet elég lesz?

(6) Egy gyárban 2000 lámpa világít. Évente mindegyikben a többitől függetlenül $p = 1/4$ valószínűséggel ég ki az izzó. Mekkora az esélye, hogy az idénre megvásárolt 540 tartalék izzó elegendő lesz a pótlásra?

(7) Szeretnénk megállapítani, hogy hány dohányos él Budapesten. Ezért megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott budapesti lakost arról, hogy dohányoznak-e (visszatevéses mintavétellel). A de Moivre–Laplace (centrális határeloszlás) tétel alapján milyen nagyra kell n-et választani, ha azt szeretnénk, hogy a kapott relatív gyakoriság legfeljebb 1 százalékot tévedjen legalább 95%-os megbízhatósággal? Mit kapunk a Csebisev-egyenlőtlenségből?

(8) Egy egyetemre 1000 diák jár. Mindegyikük 0,002 valószínűséggel lesz beteg egy adott napon. Mekkora az esélye, hogy holnap legfeljebb 4-en lesznek betegek?