Valószínűségszámítás, 6. feladatsor, 2022. október 24-28.

(1) Határozzuk meg a λ paraméterű Poisson-eloszlás móduszát.

(2) Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

Megoldás

Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget a fejek számára, vagyis az X valószínűségi változóra, melynek eloszlása binomiális eloszlás: és a várható értéke 50:

$$\mathbb{P}(44 \le X \le 56) = 1 - \mathbb{P}(|X-50| \ge 7) \ge 1 - \frac{D^2(X)}{7^2} = 1 - \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{7^2} = 1 - \frac{25}{49} = 49\%.$$

Hasonlóképpen, ha Y a fejek száma 1000 dobásból, akkor $n = 1000$ és $\mathbb{E}(Y) = 500$, így

$$\mathbb{P}(440 \le Y \le 560) = 1 - \mathbb{P}(|Y-500| \ge 61) \ge 1 - \frac{D^2(X)}{61^2} = 1 - \frac{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{61^2} = 93,3\%.$$

Vagyis ugyanolyan arányok közé esés valószínűségére jobb becslést tudunk mondani, ha több dobás van.

(3) Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $X_n - X \to 0$ eloszlásban? Itt X, illetve (X_n) ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók sorozata.

Legyen X_n ugyanannak a kockadobásnak az értéke minden n-re (egyszer dobunk, és utána minden X_n ugyanez). Legyen továbbá $X = 7 - X_1$. Ennek ugyanaz az eloszlása, mint bármelyik X_n-nek, hiszen ugyanazok a lehetséges értékek és a hozzájuk tartozó valószínűségek. Ezért $X_n \to X$ eloszlásban. Viszont

$$X_n - X = 2X_n - 7 = 2X_1 - 7$$

minden n-re, ami tehát n-ben nézve egy konstans, nem nulla egészekből álló sorozat, ez nem tart nullához.

Egy másik lehetőség: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ és X mind független azonos eloszlású valószínűségi változók, például kockadobások, vagy standard normális eloszlású valószínűségi változók. Az eloszlásbeli konvergencia teljesül, de $X_n - X$ eloszlása minden n-re ugyanaz, és nem azonosan nulla (a szórása például $\sqrt{2D(X_1)}$).

(4) Mutassunk arra példát, hogy X_n, X azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $X_n \to X$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

Legyen X_n ugyanannak a kockadobásnak az értéke minden n-re (egyszer dobunk, és utána minden X_n ugyanez). Legyen továbbá $X = 7 - X_1$. Ennek ugyanaz az eloszlása, mint bármelyik X_n-nek, hiszen ugyanazok a lehetséges értékek és a hozzájuk tartozó valószínűségek. Ezért $X_n \to X$ eloszlásban.

Ugyanakkor X_n nem tart X-hez sztochasztikusan: $\mathbb{P}(|X_n - X| > 1) = 5/7$ minden n-re, azaz $\varepsilon = 1$-re a $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ valószínűségek sorozata nem tart 0-hoz $n \to \infty$ esetén.

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy c számra $X_n \to c$ eloszlásban $n \to \infty$ esetén, akkor sztochasztikusan is.

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített.

Vegyünk egy olyan h függvényt, amely folytonos, korlátos, pontonként legalább akkora, mint az $\mathbb{I}(|x-c| \ge \varepsilon)$ indikátorfüggvény, és amelyre $h(c) = 0$. Ekkor az eloszlásbeli konvergencia definícióját a h függvényre alkalmazva

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \ge \varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{I}(|X_n - c| \ge \varepsilon) \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(h(X_n)) = \mathbb{E}(h(c)) = h(c) = 0.$$

Ezzel a sztochasztikus konvergenciát beláttuk.

(6) Adjunk példát diszkrét valószínűségi változókból álló sorozatra, mely majdnem mindenütt 0-hoz tart, de L^2-ben nem tart 0-hoz! Adjunk példát olyan sorozatra is (nem kell diszkrétnek lennie), ahol L^2 konvergencia fennáll, de majdnem mindenütt konvergencia nem áll fenn.

Megoldás. Legyen $\Omega = [0,1]$ a geometriai valószínűségi mezővel. Legyen $X_n(\omega) = n \cdot \mathbb{I}(\omega < 1/n)$ minden n-re és ω-ra. Világos, hogy minden rögzített $\omega \in (0,1)$-re minden elég nagy n-re $X_n(\omega) = 0$, ezért $X_n(\omega) \to 0$ teljesül majdnem mindenütt.

Másrészt, az (X_n) sorozat akkor tart L^2-ben nullához, ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = 0.$$

Most az X_n két lehetséges értéke 0 és n, ezért

$$\mathbb{E}(X_n^2) = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n,$$

ami nem tart 0-hoz.

A megfordításhoz: a valószínűségi mező legyen továbbra is Ω a geometriai valószínűségi mezővel.

A valószínűségi változókat, melyek tehát $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények, csoportokban definiáljuk, az egyes csoportok mérete $2, 4, 8, 16, \ldots$, azaz a 2-hatványok. A k. csoporthoz bontsuk fel a $[0,1]$ intervallumot 2^k egyforma hosszú intervallumra (minden pontot pontosan egyszer fedve le), és a k. csoporton belül a j. valószínűségi változó legyen a j. kis intervallum indikátora (1 az intervallumon belül, 0 azon kívül).

Minden $\omega \in [0,1]$ szám (elemi esemény) minden k-ra valamelyik kis intervallumba esik, így minden k-ra az adott 2^k nagyságú csoport tagjai közül egy esetben 1, a többi esetben 0 lesz az érték, vagyis $X_n(\omega)$. Ebből következik, hogy $X_n(\omega)$ végtelen sokszor veszi fel az 1 és a 0 értékeket is, tehát nem konvergens. Így a sorozat 0 valószínűséggel konvergens, a majdnem mindenütt való konvergencia nem áll fenn.

Másrészt $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{1}{2^{2k}}$, ha $2^k \le n \le 2^{k+1}$, itt a két lehetséges érték 0 vagy 1. Ez 0-hoz tart, így a sorozat 0-hoz tart L^2 értelemben.

(7) Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

Tegyük fel, hogy minden részsorozatnak van 1 valószínűséggel konvergens részsorozata. Tegyük fel, hogy nem igaz a sztochasztikus konvergencia, vagyis valamely $\varepsilon > 0$-ra

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \delta > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy van egy olyan részsorozat, ami mentén

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) = \delta > 0.$$

Ebből a részsorozatból válasszunk ki egy 1 valószínűséggel konvergens részsorozatot. Mivel az 1 valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ez a részsorozat sztochasztikusan is konvergál, ez viszont ellentmond ennek a legutóbbi feltételnek. Ellentmondásra jutottunk, vagyis a sorozat sztochasztikusan konvergál.

Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ sztochasztikusan, és (X_{n_k}) egy részsorozat. Kellene: ennek egy 1 valószínűséggel konvergens részsorozata.

Tudjuk: minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) \to 0.$$

Az (X_{n_k}) is sztochasztikusan konvergál. Ezért találhatunk olyan részsorozatot, hogy minden j-re

$$\mathbb{P}\left(|X_j^* - X| > \frac{1}{j}\right) \le \frac{1}{2^j}.$$

Ezeknek az összege véges, a Borel–Cantelli-lemma szerint 0 valószínűséggel következik be végtelen sok. Ez elég, mert ha ebből csak véges sok következik be, akkor egy küszöbtől kezdve ez már nem igaz egyetlen j-re sem. Ha minden elég nagy j-re legfeljebb $1/j$ a különbség, az viszont már elég.

Vagy másképpen: elég nagy n-től kezdve már az unió valószínűsége is kisebb ε-nál.

A sztochasztikus konvergencia miatt minden $j \ge 1$-re van olyan $N(j)$, hogy $n \ge N(j)$ esetén

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{j^2}\right) \le \frac{1}{j^2},$$

ugyanis $\varepsilon = \frac{1}{j^2}$ esetén a bal oldalon álló valószínűség 0-hoz tart. Az (X_{n_k})-ból válasszunk egy olyan részsorozatot, hogy a j. tagra $n_{k_j} \ge N(j)$ legyen, amiből következik, hogy

$$\mathbb{P}\left(|X_{n_{k_j}} - X| > \frac{1}{j^2}\right) \le \frac{1}{j^2}.$$

Ezeknek az eseményeknek a valószínűségeinek véges az összege, így a Borel–Cantelli-lemma szerint közülük 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Ha viszont ezek közül csak véges sok következik be, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra csak véges sok olyan j lesz, amire $|X_{n_{k_j}} - X| > \varepsilon$, vagyis ebből következik, hogy $X_{n_{k_j}} \to X$. Ezzel megkaptuk az 1 valószínűségű konvergenciát.

(8) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és Exp(1) eloszlásúak. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

Tekintsük az $A_n = \{X_n > \log n\}$ eseményeket. Ezek egymástól függetlenek (hiszen az X_n valószínűségi változók is azok, és az exponenciális eloszlás definíciója alapján

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n > \log n) = e^{-\log n} = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty.$$

Mivel a függetlenség is fennáll, a Borel–Cantelli-lemma második része alapján 1 valószínűséggel az $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ események közül végtelen sok bekövetkezik. Ha pedig végtelen sok n-re $X_n > \log n$, akkor $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1$ is teljesül. Tehát

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1\right) = 1.$$

Legyen most $\varepsilon > 0$ adott, és $B_n = \{X_n > (1+\varepsilon)\log n\}$. Az előzőhöz hasonlóan

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X_n > (1+\varepsilon)\log n) = e^{-(1+\varepsilon)\log n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) < \infty.$$

A Borel–Cantelli-lemma szerint tehát 1 valószínűséggel a $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ események közül csak véges sok következik be. Ha viszont $X_n > (1+\varepsilon)\log n$ csak véges sok n-re teljesül, akkor $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq (1+\varepsilon)$. Tehát minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq (1+\varepsilon)\right) = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq (1+1/k)\right) = 1,$$

hiszen a valószínűség folytonos tulajdonságú, és az itt szereplő események monoton sorozatot alkotnak.

A két eddig belátott egyenletből már következik az állítás, ugyanis két 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű.