Valószínűségszámítás, 6. feladatsor, 2022. október 24-28.

(1) Határozzuk meg a λ paraméterű Poisson-eloszlás móduszát.

(2) Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

(3) Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől? Mennyi a pontos érték, ha feltesszük még azt is, hogy a hossz normális eloszlású?

(4) Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $X_n - X \to 0$ eloszlásban? Itt X, illetve (X_n) ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók sorozata.

(5) Mutassunk arra példát, hogy X_n, X azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $X_n \to X$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

(6) Bizonyítsuk be, hogy ha egy c számra $X_n \to c$ eloszlásban $n \to \infty$ esetén, akkor sztochasztikusan is.

(7) Adjunk példát diszkrét valószínűségi változókból álló sorozatra, mely majdnem mindenütt 0-hoz tart, de L^2-ben nem tart 0-hoz! Adjunk példát olyan sorozatra is (nem kell diszkrétnek lennie), ahol L^2 konvergencia fennáll, de majdnem mindenütt konvergencia nem áll fenn.

(8) Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

(9) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és $\mathrm{Exp}(1)$ eloszlásúak. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$