Valószínűségszámítás, 9. feladatsor, 2022. november 28-december 2.

(1) A lovaskocsik felelősségbiztosítások kárainál dologi és személyi kártérítést nyújt a biztosító. A dologi kifizetések $\Gamma(\alpha, \lambda)$ eloszlásúak, a személyiek pedig $\Gamma(\beta, \lambda)$ eloszlásúak. Feltételezzük, hogy a két kifizetés független egymástól. Milyen eloszlású egy kár összkifizetése?

(2) Bublundia köztársaságban q-féle részvény van a tőzsdén. Ezek árfolyamai függetlenek egymástól. Egy év múlva az i-edik részvény eredeti árának X_i^2-szeresét éri, ahol $X_i \sim N(0,1)$, és egymástól függetlenek. Milyen eloszlású egy befektető portfoliójának értéke egy év múlva, ha most mindegyik részvénybe 1 petákot fektetett?

(3) Milyen eloszlású két független $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó összege?

(4) Dobjunk egy szabályos dobókockával kétszer egymás után. Legyen a két dobás X és Y.

  (a) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X|X+Y=6)$ feltételes várható értéket.
  (b) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X|X+Y=7)$ feltételes várható értéket.
  (c) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X|X+Y)$ feltételes várható értéket.
  (d) Határozzuk meg az $\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X|X+Y))^2\big)$ várható értéket, azaz az előrejelzés négyzetes hibáját.

(5) 0-ból indulva egyszerű szimmetrikus bolyongást végzünk: minden lépésben a korábbiaktól függetlenül 1/2 valószínűséggel az eggyel nagyobb, 1/2 valószínűséggel az eggyel kisebb számhoz lépünk.

  (a) Feltéve, hogy hat lépés után a 0-ban vagyunk, mennyi a valószínűsége, hogy jártunk közben a 3-ban?
  (b) Feltéve, hogy hat lépés után a 2-ben vagyunk, mennyi a valószínűsége, hogy az első lépés +1 volt?
  (c) Feltéve, hogy hat lépés után a 2-ben vagyunk, mennyi a valószínűsége, hogy 8 lépés után a 2-ben vagyunk?
  (d) Mennyi a valószínűsége, hogy hamarabb érjük el a 10-et, mint a -5-öt?
  (e) Mennyi a szükséges lépések számának várható értéke, ha addig tart a bolyongás, amíg el nem érjük a -5-öt vagy a 10-et?

(6) Legyen $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ egyszerű szimmetrikus bolyongás. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $n \geq 1$ egészre

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

(7) Legyen $\nu_r = \inf\{n : S_n = r\}$ az első olyan időpont, amikor a bolyongás megérkezik az $r > 0$ szintre, M_n pedig az első n lépés során elért legnagyobb szint. Ekkor $n \geq 1,\ n \equiv r \mod 2$ esetén

$$\mathbb{P}(\nu_r \leq n) = \mathbb{P}(M_n \geq r),$$

továbbá

$$\mathbb{P}(\nu_r = n) = \frac{r}{n}\mathbb{P}(S_n = r).$$

(8) Arizona egy kis falujában 103-an szavaztak Bidenre és 98-an Trumpra. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. Mennyi a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálásnál végig Biden vezetett? Egyenlőséget sem engedünk meg menet közben.

(9) Arizona egy kis falujában 103-an szavaztak Bidenre és 98-an Trumpra. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. Mennyi a valószínűsége, hogy az első három szavazat mindegyikét Trump kapta?