Leíró és matematikai statisztika

Matematika alapszak, matematikai elemző szakirány

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Matematikai Intézet
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: `zempleni.elte.hu`

E-mail: `andras.zempleni@ttk.elte.hu`

Szoba: D 3-310

1. előadás

Tudnivalók a tantárgyról

- Kötelező irodalom: az előadásokon elhangzottak – a bemutatott módszerek, definíciók, tételek, bizonyítások, példák, ellenpéldák, feladatok.
- Ajánlott irodalom:
  - Korpásné: Általános statisztika I. $\rightsquigarrow$ tankönyv leíró statisztikához
  - Molnárné-Tóthné: Általános statisztika példatár I. $\rightsquigarrow$ példatár leíró statisztikához
  - Bolla-Krámli: Statisztikai következtetések elmélete. $\rightsquigarrow$ tankönyv matematikai statisztikához
  - Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár.
  - Pröhle-Zempléni: Statistical Problem Solving in R. Elérési helye: `http://zempleni.elte.hu/Stat_R_Prohle_Zempleni` $\rightsquigarrow$ **R** programnyelv bevezető, a benne szereplő statisztikai témák erősen átfednek az előadással
  - Baran: Hipotézisvizsgálat `https://gyires.inf.unideb.hu/mobiDiak/Baran-Sandor/Hipotezisvizsgalat/bsstat.pdf`
  - Fazekas: Statisztika `https://gyires.inf.unideb.hu/AM/statmobi.pdf`

Tudnivalók a tantárgyról/2

- Gyakjegy szükséges a vizsgához
- Vizsga: írásbeli, 2 és fél órás, 120 pontos, laboros (Canvas)
  - Feladatmegoldás (tesztes és kifejtős feladatok, R használható)
  - Definíciók, tételek, bizonyítások, módszerek bemutatása
  - **R** nyelvű számítógépes output-ok, számítások végeredményeinek kiértékelése, szöveges értelmezése
  - Vizsgapontok szerezhetőek (kb max 25) az előadáshoz kapcsolódóan is (villámkérdések, kvízek megoldásával, az előadáson való aktív részvétellel)
  - Osztályozás (tervezet):

elégtelen (1)	0	–	44
elégséges (2)	45	–	64
közepes (3)	65	–	84
jó (4)	85	–	104
jeles (5)	105	–	

A tananyagról

- Tervezett tematika: a honlapon
- A statisztika két fő ága:
  - Leíró statisztika (kb. az első 2-3 hét)
  - Matematikai statisztika (a többi 10 héten keresztül)
  - Néhol van/lesz átfedés
- A levezetések, példamegoldások a táblára kerülnek fel. A leíró statisztikai anyagrészek nagy része, közérdekű infók, feladatok szövegei, érdekességek, szimulációk, egyéb ábrák lesznek kivetítve
- **Lényeges, hogy amit kiszámoltunk, értelmezzük szövegesen, értelmes, kerek magyar mondatban - mert laikusoknak is tudnunk kell az eredményeket kommunikálni!**

Az elemzésekhez használt szoftver/programnyelv: **R**

- Statisztikai modellezésre, adatok elemzésére kiválóan alkalmas
- Gyakorlaton mindenki használni fogja
- Nyílt forráskódú, ma már alig van statisztikai probléma, feladat, aminek a megoldására ne lenne valamilyen csomag – akár több is
- Népszerűsége 2022-ben az összes programozási nyelv mezőnyében:
  - 7. hely – PYPL index
  - 12. hely – TIOBE index
- Jelenleg a legelterjedtebb statisztikai programnyelv
- A gyakorlaton mindenki használni fogja, az előadáson ezzel mutatok be szimulációkat, **a vizsgán kell R-es output-ot elemezni/értelmezni** (a gyakorlaton is lesznek **R**-es beadandók)

- Letöltési helye: `https://cran.r-project.org/`
- Programszerkesztésre ajánlott szoftver: RStudio letöltési helye: `https://www.rstudio.com/products/rstudio/download3/`

A statisztika története

- Kezdetek: népszámlálások az ókorban (Kína, Római Birodalom)
- A statisztika szó eredete (vitatott):
  - *status* [latin]: állapot
  - *Staat* [német], *State* [angol]: állam
- Sokáig a statisztika az állam állapotáról fontos információk begyűjtését jelentette.
- Tudománnyá válásának kezdete: 17. század – demográfia (népesség/társadalomstatisztika)
- A 19. századtól
  - A statisztika mindenféle információ begyűjtésének, feldolgozásának és értelmezésének a tudományává vált
  - Összekapcsolódás a valószínűségelmélettel
- A számítógépek megjelenésével fejlődése felgyorsult és jelentősége megnőtt
- A statisztika megítélése vegyes, az eredményeket mindig kritikusan kell szemlélni. Churchill: "*I only believe in statistics that I doctored myself*" (Csak azoknak a statisztikáknak hiszek, amiket én magam hamisítottam.)

Motiváció

Kérdések, amikre statisztikai eszközökkel – bizonyos mértékig – választ tudunk adni:

- Az idei egy nagyon hideg tél az USA egyes részein. Igaza volt Trumpnak, hogy nincs is globális felmelegedés?
- A dohányzás mennyivel növeli annak az esélyét, hogy valaki 70 éves koráig tüdőrákban betegszik meg?
- A 2016-os USA-beli elnökválasztáson a közvélemény-kutatók Wisconsin államban közvetlenül a választás előtt átlagosan 6,5%-os Clinton-előnyt mértek. Mi az esélye, hogy Wisconsin-ban Trump győz? [0,7%-kal Trump nyert]
- Vajon állíthatjuk-e, hogy egy év során a bizonyos méretet meghaladó napfoltok száma Poisson-eloszlást követ? Előre tudjuk jelezni a múltbeli adatok alapján, hogy 2019-ben hány napfoltot fognak észlelni?

A statisztika fogalma és ágai

Statisztika: a valóság tömör, számszerű jellemzésére szolgáló tudományos módszertan, illetve gyakorlati tevékenység.
Ágai:

- **Leíró statisztika**: magában foglalja az információk összegyűjtését, összegzését, tömör, számszerű jellemzését szolgáló módszereket. Nem foglalkozik a véletlennel.
- **Matematikai statisztika**: matematikai tudomány, a valószínűségi változókkal jellemezhető jelenségeket leíró adatok feldolgozásáról, értelmezéséről és felhasználásáról szóló tudományos módszertan

Megjegyzés: a *statisztika* szó másik jelentése – matematikai statisztikai értelemben a statisztika egy valószínűségi (vektor)változó, amit a mintából számolunk (később bővebben)

Leíró statisztikai alapfogalmak I.

- Statisztikai egység: a statisztikai vizsgálat tárgyát képező egyed
- Statisztikai **sokaság**: a megfigyelés tárgyát képező egyedek összessége, halmaza. Röviden: sokaság (populáció). Lehet hipotetikus is (gyár által a jelenlegi körülmények között gyártandó termékek).
- **Statisztikai adat**: valamely sokaság elemeinek száma vagy a sokaságra vonatkozó számszerű jellemző, mérési eredmény.
- Statisztikai **ismérv**: a sokaság egyedeit jellemző tulajdonság. Röviden: ismérv.
- **Ismérvváltozatok**: az ismérvek lehetséges kimenetelei.
- **Minta**: a sokaság véges számosságú részhalmaza.

Statisztikai következtetés: a valóságban a teljes sokaságot általában nem tudjuk megfigyelni. A mintára vonatkozó információk alapján szeretnénk a teljes sokaság egészére, egyes jellemzőire, tulajdonságaira érvényes következtetéseket kimondani.

Leíró statisztikai alapfogalmak (példák)

Példák:

Sokaság:	most az előadáson lévő emberek
Statisztikai egység:	az oktató
Adat:	a legmagasabb hallgató testtömegindexe
Ismérv:	nem
Ismérvváltozatok:	férfi ($\to$ 1), nő ($\to$ 2)
Minta:	5 véletlenül választott hallgató

Sokaság:	az ELTE TTK Matematikai szakgyűjteményében lévő könyvek
Statisztikai egység:	a BF 13873 raktári jelzetű könyv
Adat:	a szakgyűjteményben lévő könyvek száma
Ismérv:	könyv oldalainak száma
Ismérvváltozatok:	631, 321, 153, 463, ...
Minta:	Rényi: Valószínűségszámítás című könyve

Leíró statisztikai alapfogalmak II

A sokaságok csoportosítása:

1.) A sokaság egységeinek megkülönböztethetősége szerint:
   - diszkrét: a sokaság egységei elkülönülnek egymástól
   - folytonos: a sokaság egységeit nem tudjuk természetes módon elkülöníteni (pl. áramtermelés)

2.) A sokaság időpontra vagy időtartamra értelmezhető-e:
   - álló: csak egy adott *időpontra* értelmezhető
   - mozgó: csak egy adott *időtartamra* értelmezhető

3.) A sokaság számossága szerint:
   - véges (a gyakorlatban általában ilyenekkel foglalkozunk)
   - végtelen (hipotetikus)

A statisztikai adatok fajtái:

- Alapadatok: közvetlenül a sokaságból származnak (méréssel, megszámlálással)
- Leszármaztatott adatok: alapadatokból műveletek eredményeként adódnak (pl. átlagolással, osztással)

A statisztikai adatok nem mindig pontosak – a mért és a tényleges adat eltérhet egymástól, például kerekítési okokból.

Rövid szünet

Egy kivágat a középiskolákban kötelezően alkalmazandó e-Kréta rendszerből:

#	Tantárgy	Tanuló átlaga	Osztályátlag	Különbség
1	Irodalom	5,00	3,39	1.61
2	Magyar nyelv	4,75	3,44	1.31
3	Történelem	4,67	3,76	0.91
4	Angol I nyelv	5,00	3,94	1.06
5	Angol II nyelv	0,00	2,67	-2.67
6	Francia II nyelv	0,00	3,44	-3.44
7	Olasz II nyelv	0,00	4,46	-4.46

Mi a vélemény?
Minden héten lesz 5 percünk statisztikai furcsaságokra, küldjenek anyagot!

Feladatok

E1.) Döntsük el, hogy az alábbiak egy sokaságot definiálnak, a sokaság egy-egy egyedére vonatkoznak, vagy statisztikai adatok! A sokaságok és az adatok esetében határozzuk meg azok típusát!

a.) Most az Allee parkolójában álló autók száma

b.) Most az Allee parkolójában álló autók

c.) Az Allee parkolójában álló MSY-766 rendszámú Opel Vectra

d.) Az Allee parkolójában álló Opelek aránya

e.) Az egy hét alatt egy gyárban legyártott selejtes termékek

f.) A bankszámlánkon jóváírt kamatok

g.) Az őszi Eötvös 5 km-es futáson legjobb időt elérő másodéves hallgató (nem volt holtverseny)

Leíró statisztikai alapfogalmak III

- Az ismérvek típusai I.
  - minőségi ismérv: az egyedek számszerűen nem mérhető tulajdonsága
  - mennyiségi ismérv: az egyedek számszerűen mérhető tulajdonsága. Két fajtájukat különböztetjük meg:
    - diszkrét: véges vagy megszámlálhatóan sok értéket vehet fel
    - folytonos: egy adott intervallumon belül kontinuum számosságú értéket felvehet
  - időbeli ismérv: az egységek időbeli elhelyezésére szolgáló rendezőelvek
  - területi ismérv: az egységek térbeli elhelyezésére szolgáló rendezőelvek
- Az ismérvek típusai II.
  - közös ismérvek: tulajdonságok, amik szerint a sokaság egyedei egyformák
  - megkülönböztető ismérv: azok a tulajdonságok, amik szerint a sokaság egyedei különböznek egymástól

Példák

Legyen a sokaság: az előadáson lévő hallgatók. Példák ismérvekre:

minőségi:	szemszín, nem	közös:	orrszám
diszkrét mennyiségi:	testvérek száma	megkülönböztető:	testsúly
folytonos mennyiségi:	testmagasság		
időbeli:	születési idő		
területi:	születési hely		

Gyűjtsünk mi is adatokat a csoportról! Megadom a Teams csoport chatjében a linket

Leíró statisztikai alapfogalmak IV

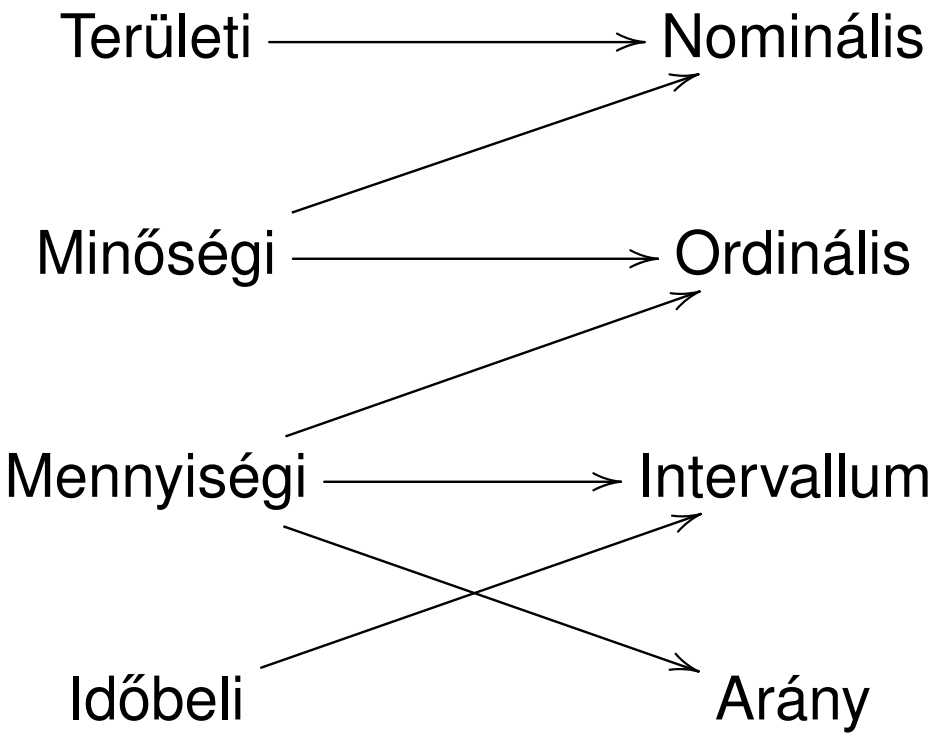
Mérési skálák (mérési szintek):

- Névleges (nominális): a hozzárendelt számok csak ún. kódszámok, amik a sokaság egyedeinek azonosítására szolgálnak. Ezek között matematikai relációkat és műveleteket nincs értelme végezni. Pl. a hallgatók neme.
- Sorrendi (ordinális): a sokaság egyedeinek valamely tulajdonság alapján sorba való rendezése. Az egyedek tulajdonsága közötti különbséget nem lehet mérni. Pl. a hallgatók jegyei egy tárgyból.
- Intervallumskála: a skálaértékek különbségei is valós információt adnak a sokaság egyedeiről. A skálán a nullpont meghatározása önkényes. Ilyen skálákhoz mértékegység is tartozik. Pl. hőmérséklet (C fokban megadva).
- Arányskála: a skálának van valódi nullpontja is. Minden matematikai művelet elvégezhető ezekkel a számokkal. Pl. a hallgatók magassága.

[Metrikus skála: intervallum- és arányskála közös neve – ritkábban használatos elnevezés]

Leíró statisztikai alapfogalmak V

Az ismérvek és a mérési skálák kapcsolódása:



Feladatok

E**2.)** Határozzuk meg, hogy a következő ismérvek milyen típusúak és hogy milyen skálán mérhetők! Mennyiségi ismérvek esetén állapítsuk meg, hogy az adott ismérv diszkrét vagy folytonos!

a.) autó márkája

b.) testsúly

c.) cipőméret

d.) munkahely

e.) születési év

f.) egy vállalat bérköltsége

Leíró statisztikai alapfogalmak VI

Statisztikai sor: a sokaság egyes jellemzőinek felsorolása.
Az ismérvek fajtája szerint beszélhetünk minőségi, mennyiségi, időbeli és területi sorokról.
A statisztikai sorok további csoportosítása:

- Csoportosító sor: a sokaság egy megkülönböztető ismérv szerinti osztályozásának eredménye; az adatok összegezhetők (van 'Összesen' sor)
- Összehasonlító sor: a sokaság *egy részének* hasonlítása a sokaság egészéhez, (példa: mezőgazdaságban dolgozók részaránya az egyes években), vagy változásának adatai (idősorok)
- Leíró sor: különböző fajta, gyakran eltérő mértékegységű statisztikai adatokat tartalmaz

Például ha egy statisztikai sor tartalmazza az előadás hallgatóit nemek szerint, akkor ez a sor minőségi csoportosító sor.

Leíró statisztikai alapfogalmak VII

Statisztikai tábla: a statisztikai sorok összefüggő rendszere.
A statisztikai táblák fajtái:

- Egyszerű tábla: nem tartalmaz csoportosítást, nincs benne összegző sor
- Csoportosító tábla: egyetlen csoportosító szempontot tartalmaz. A sorok különböző sokaságokat jelentenek
- Kombinációs tábla vagy *kontingenciatábla* vagy kereszttábla: legalább két csoportosító szempontot tartalmaz, egy sokaság egyedeit csoportosítjuk

Feladatok

E3.) Milyen típusúak az alábbi táblák és milyen típusú sorokat tartalmaznak? Határozzuk meg a táblázatbeli csoportosítás alapját képző ismérvek típusát és azok mérési skáláját!

a.) Egy vállalatnak 10 telephelye van. Három telephely dolgozóinak megoszlása életkor szerint:

Életkor (év)	2. telephely	8. telephely	9. telephely
18–30	20	20	30
31–40	20	30	20
41–50	20	30	50
51–62	20	20	10
Összesen	80	100	110

b.) Egy golfklub tagjainak megoszlása nem és testtömegindex szerint:

Testtömegindex	Férfi	Nő	Összesen
–25	30	20	50
25–30	10	5	15
30–	5	2	7
Összesen	45	27	72

Leíró statisztikai alapfogalmak VIII

A statisztikai elemzések egyik legfontosabb eszközei a viszonyszámok (alias: indikátorok). A **viszonyszám** két statisztikai adat hányadosa. Jelölések:

$$V = \frac{A}{B}$$

ahol V: viszonyszám; A: a viszonyítás tárgya; B: a viszonyítás alapja.

A viszonyszámok fajtái:

- Megoszlási: a sokaság egy részének a sokaság egészéhez való viszonyítása
- Koordinációs: a sokaság egy részének a sokaság egy másik részéhez való viszonyítása
- Dinamikus: két időpont vagy időszak adatának hányadosa
- Intenzitási: különböző fajta adatok viszonyítása egymáshoz; gyakran a mértékegységük is eltérő.

Feladatok

E**4.)** Az alábbi mondatokban milyen viszonyszámok rejtőznek? Azok milyen típusúak? Adjuk meg kiszámításuk pontos képletét!

a.) Egy 25 fős csoportban a lányok részaránya 40%.

b.) Idén 100, a tavalyihoz képest 10%-kal kevesebb hallgató vette fel a Diszkrét matematika tantárgyat.

c.) Marika összesen 2000 km-es nyaralása alatt autója átlagfogyasztása 7 l/100 km volt.

d.) Az ELTE-n 1500 oktató van, az egy oktatóra jutó hallgatók száma 20.

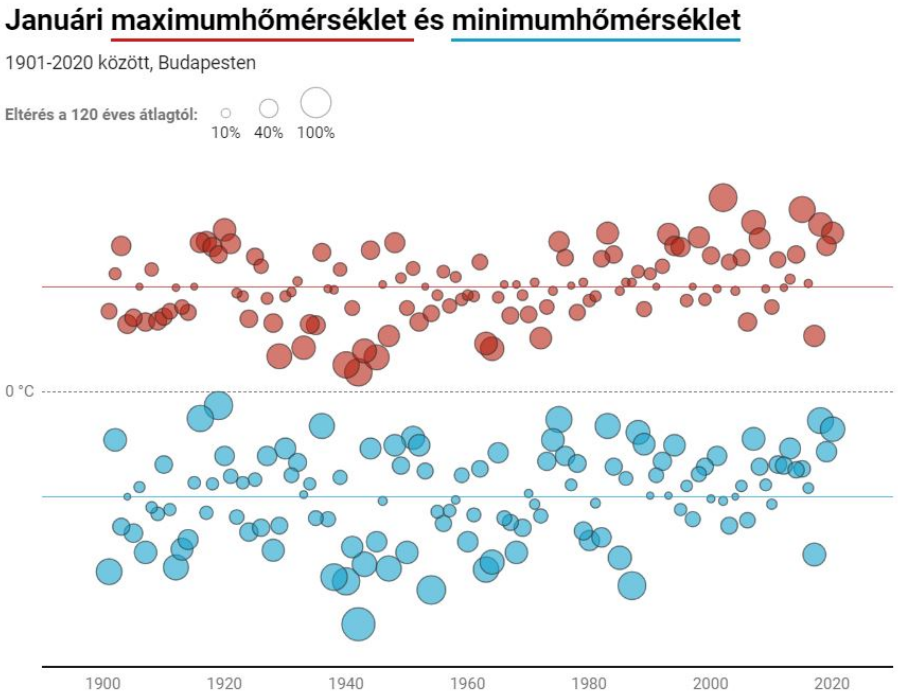
A statisztikai elemzés lépései

1. Tervezés
   a. Mit vizsgálunk, mi a probléma/feladat
   b. Hogyan gyűjtjük az adatokat
   c. Előzetes sejtések, hipotézisek megfogalmazása
2. Terepmunka – adatgyűjtés
3. Adatbevitel, kódolás (ha szükséges)
4. Adatok validálása (biztosan rossz értékek kiszűrése, mint például életkornál a 9999)
5. Előzetes adatelemzés, adatellenőrzés: leíró statisztikákkal, grafikonok készítése
6. Hibás adatok kijavítása vagy kihagyása
7. Adatelemzés, statisztikai következtetések levonása – a matematikai statisztika módszereivel
8. Az eredmények értelmezése, visszacsatolás, kommunikáció

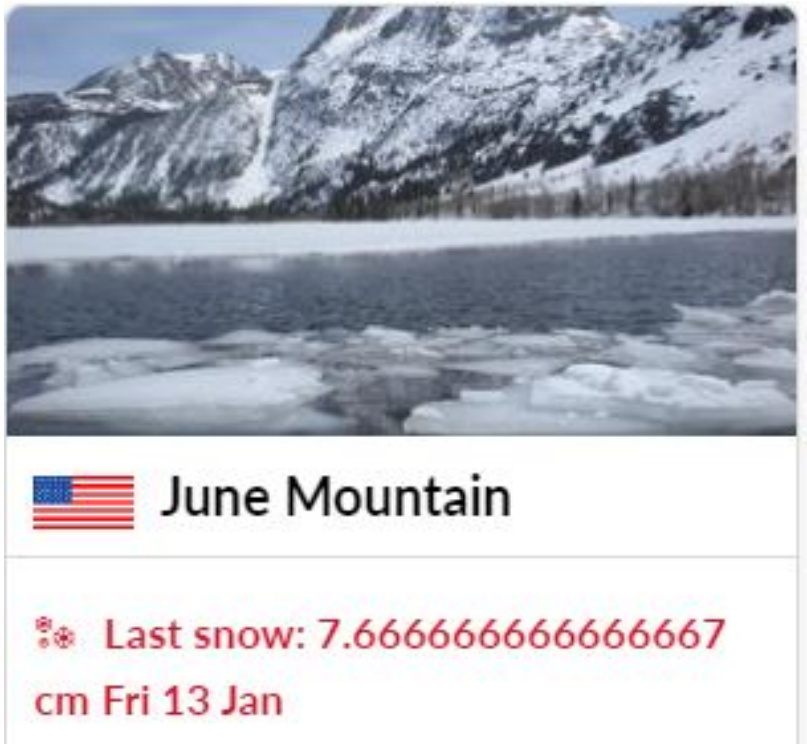
A grafikus megjelenítés szerepe

- A statisztikus legfőbb kommunikációs eszközei a diagramok.
- Az emberek többsége utálja a
  - barokkos körmondatokkal teletűzdelt statisztikai jelentéseket.
  - számokkal teli táblázatokat.
- Az adatokban rejlő információk gyorsabb kinyerését és feldolgozását segítik az azokból készített különféle ábrák, diagramok:
  - oszlopdiagram: idősorok, megoszlás ábrázolására
  - vonaldiagram: idősorok ábrázolására
  - hisztogram: mennyiségi sorok ábrázolására
  - kördiagram: megoszlás érzékeltetésére (nem ideális)
  - stb.
- Milyen a jó diagram?
  - illeszkedik az ábrázolt adatok fajtájához és a probléma jellegéhez
  - a célközönség meg tudja érteni
  - áttekinthető, olvashatók rajta a feliratok, jelölések
  - kreatív, esztétikus

Két rossz példa



Miért kell ugyanazt a dolgot kétféleképpen is jelölni (ráadásul rosszul)?



Csak a feltétlenül szükséges számú tizedesjegyet adjuk meg!