

# Leíró és matematikai statisztika

Matematika alapszak, matematikai elemző szakirány

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék  
Matematikai Intézet  
Természettudományi Kar  
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Honlap: [zempleni.elte.hu](http://zempleni.elte.hu)

E-mail: [andras.zempleni@ttk.elte.hu](mailto:andras.zempleni@ttk.elte.hu)

Szoba: D 3-310

9. előadás

# A próbafüggvény

**Próbafüggvény:**  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow [0; 1] \rightsquigarrow$  ennyi valószínűséggel vetjük el a minta alapján a nullhipotézist

- $\varphi(\mathbf{x}) := I(\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \\ 0 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \end{cases}$
- A próbafüggvény is egy statisztika
- A próbafüggvény egyértelműen meghatározza a próbát, ezért gyakran a próbát magával a  $\varphi$  függvénnyel azonosítják

- Tipikusan  $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } T(\mathbf{x}) \geq c_\alpha \\ 0 & \text{ha } T(\mathbf{x}) < c_\alpha \end{cases}$  alakú,

ahol  $T$  egy alkalmas statisztika,

$c_\alpha$  pedig a kritikus érték, amit úgy határozunk meg, hogy

$P_{\vartheta \in \Theta_0}(\mathcal{X}_k) = E_{\vartheta \in \Theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = P_{\vartheta \in \Theta_0}(T(\mathbf{X}) \geq c_\alpha) = \alpha$  teljesüljön

- Diszkrét eloszlású minták esetén rendszerint nem lehet úgy meghatározni  $c_\alpha$ -t, hogy a terjedelem pontosan  $\alpha$  legyen, ezért a próbafüggvény fogalmának általánosítására, úgynevezett **véletlenítésre** (randomizálásra) van szükség ilyenkor.

**Véletlenített próbafüggvény:**  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow [0; 1]$

- $\varphi(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_k \\ p & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_r, \text{ ahol} \\ 0 & \text{ha } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_e \end{cases}$

$\mathcal{X}_r$  neve: véletlenítési vagy "randomizálási" tartomány;  $p \in [0; 1]$

- Tipikusan  $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } T(\mathbf{x}) > c_\alpha \\ p_\alpha & \text{ha } T(\mathbf{x}) = c_\alpha \\ 0 & \text{ha } T(\mathbf{x}) < c_\alpha \end{cases}$  alakú,

ahol  $T$  egy alkalmas statisztika,

$c_\alpha$  a kritikus érték és  $p_\alpha \in [0; 1]$ , amiket úgy határozunk meg, hogy

$$E_{\vartheta \in \Theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = P_{\vartheta \in \Theta_0}(T(\mathbf{X}) > c_\alpha) + p_\alpha \cdot P_{\vartheta \in \Theta_0}(T(\mathbf{X}) = c_\alpha) = \alpha$$

teljesüljön

Az ilyen próbafüggvénnyel végrehajtott próbát **véletlenített próbának** hívjuk.

- **Torzítatlan próba (legfeljebb  $\alpha$  terjedelemmel):**

$$P_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0\text{-ra és}$$

$$P_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_1\text{-re}$$

Megfontolás a definíció mögött: ha nem teljesül  $H_0$ , akkor a minta alapján az elvetés valószínűsége legalább annyi legyen, mintha igaz lenne  $H_0$ .

- **Konzisztens próba ( $\alpha$  terjedelemmel):** olyan próba, aminek  $\alpha$  a terjedelme és a mintaméret növelésével az erőfüggvény 1-hez konvergál. Formálisan felírva:

$$P_{\vartheta \in \Theta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) = \alpha \quad \text{és}$$

$$\psi_n(\vartheta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta_1\text{-re, ahol}$$

$\psi_n$  az  $n$  elemű mintához tartozó erőfüggvény

Megj.: ha az erőfüggvény 1-hez konvergál, akkor ebből következik, hogy a másodfajú hiba valószínűsége 0-hoz tart.

- Legyenek  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$   $\alpha$  terjedelmű próbák. A  $\varphi_1$  **próba erősebb**  $\varphi_2$  **próbánál**, ha  $\varphi_1$  próba erőfüggvénye  $\forall \vartheta \in \Theta_1$  esetén nagyobb vagy egyenlő, mint  $\varphi_2$  próba erőfüggvénye  
Megj.: nem biztos, hogy két próba közül az egyik erősebb a másiknál
- **Egyenletesen legerősebb próba**: az adott hipotézisvizsgálati feladat esetén minden más  $\alpha$  terjedelmű próbánál erősebb  
Megj.: nem biztos, hogy létezik egyenletesen legerősebb próba az adott feladatra
- Mikor létezik egyenletesen legerősebb próba? Ha létezik, akkor hogyan találjuk meg?

# Legerősebb próba keresése

Ha mind  $H_0$ , mind  $H_1$  egyszerű, akkor adott  $\alpha$  terjedelemhez lehet legerősebb próbát találni, ezt pedig úgy hívják, hogy **valószínűség-hányados próba**.

A hipotézisek folytonos esetre (diszkrétre a sűrűségfüggvény helyett a konkrét eloszlást kell írni):

$$H_0 : f = f_0$$

$$H_1 : f = f_1$$

A próba kritikus tartománya:  $\mathcal{X}_k = \left\{ \mathbf{x} : \overbrace{\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}}^{T(\mathbf{x})} > c_\alpha \right\}$

Tehát azokat az  $\mathbf{x}$ -eket, amikre a  $T(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$  statisztika nagy, bepakoljuk a kritikus tartományba egészen addig, míg az adott  $\alpha$  terjedelmet el nem érjük. Diszkrét esetben ehhez általában véletlenítésre van szükség, azaz bizonyos  $\mathbf{x}$ -ek esetén nem 1 vagy 0, hanem egy, e két szám közé eső (jelöljük  $p_\alpha$ -val) valószínűséggel vetjük el a nullhipotézist.

A valószínűség-hányados próba elméleti háttérét a *Neyman-Pearson* (alap)lemma biztosítja.

**E41.)** Legyen két megfigyelésünk a  $(3; p)$  paraméterű binomiális eloszlásból. Adjuk meg a legjobb (egyenletesen legerősebb)  $0,04$  terjedelmű próbát az alábbi hipotézisekre:

$$H_0 : p \geq \frac{1}{2}$$

$$H_1 : p < \frac{1}{2}$$

**E42.)** Mutassuk meg, hogy a kétoldali, egymintás  $u$ -próba torzítatlan és konzisztens!

**E43.)** Keressünk  $n$  elemű  $N(m, \sigma^2)$  független minta esetén egyenletesen legerősebb  $\alpha$  terjedelmű próbát a

$$H_0 : m = m_0$$

$$H_1 : m > m_0$$

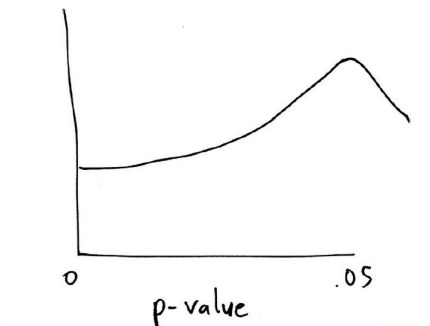
hipotézisvizsgálati feladatra, ha  $\sigma$  ismert!

Határozzuk meg a kritikus értéket, ha a próbastatisztika

$$T(\mathbf{X}) = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}! \quad \text{Ez alapján kimondható a következő}$$

**Tétel:** az egyoldali  $u$ -próba egyenletesen legerősebb a  $H_0 : m = m_0$ ,  $H_1 : m > m_0$  hipotézisvizsgálati feladatra. ( $H_1 : m < m_0$ -re is)

# Rövid szünet: "p-hacking"



- Így néz ki a tudományos publikációkra a  $p$ -értékek eloszlása. Mit mutat ez?
- Hogy kellene kinéznie, ha nem igaz a  $H_0$ ?
- És akkor, ha igaz a  $H_0$ ?
- Azaz: gyakori, hogy addig keresik a szignifikáns eredményt, míg meg nem találják



# Mintaelemszám-meghatározás

- Az  $u(t)$  próba konzisztenciájából következik, hogy minden  $\vartheta \in \Theta_1$ -hez és  $\epsilon > 0$ -hoz megadható  $n_0$ , hogy  $n > n_0$ -ra  $\psi_n(\vartheta) > 1 - \epsilon$ , azaz  $n$  elemű mintából már legalább  $1 - \epsilon$  valószínűséggel észrevesszük az eltérést, ha  $\vartheta$  a valódi paraméter.
- Közelítő formula az  $1 - \beta$  erőfüggvény-értékhez szükséges elemszámra (egyoldali esetre):

$$n \geq \sigma^2 \frac{(u_\alpha + u_\beta)^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

- A konfidencia intervallumoknál is felmerül hasonló kérdés: hány elemű minta kell, hogy az  $1 - \alpha$  megbízhatóságú intervallum hossza  $d$  legyen.
- Közelítő formula a szükséges elemszámra:

$$n \geq 4\sigma^2 \frac{(u_{\alpha/2})^2}{(d)^2}.$$

- Eddig végig feltettük a minta normalitását. Ez sokszor nem reális. Ha kiugró értékek vannak az adatsorban (vastag szélű eloszlásból származnak), akkor pl. a  $t$ -próba nem használható.
- Előjelpróba
  - Egymintás teszt a  $P(X > m) = 1/2$  nullhipotézis vizsgálatára: Összeszámoljuk az  $m$ -nél nagyobb mintaelemeket, ez  $H_0$  esetén  $\text{Bin}(n; 1/2)$  eloszlású.
  - Párosított mintákra a  $P(X > Y) = 1/2$  nullhipotézis vizsgálatára: Összeszámoljuk azokat a mintaelemeket, ahol  $X_i > Y_i$ , ez  $H_0$  esetén  $\text{Bin}(n; 1/2)$  eloszlású.
  - Kritikus tartomány szokás szerint a  $H_1$ -nek megfelelő.
- Wilcoxon (Mann-Whitney) próba független mintákra a  $P(X > Y) = 1/2$  nullhipotézis vizsgálatára: rangstatisztika (csak a sorbarendezett mintaelemek sorszámán múlik):  
 $W = \sum_{i,j} I(X_i > Y_j)$ .  $W$  aszimptotikusan normális eloszlású,  $H_0$  esetén  $EW = nm/2$ ,  $D^2(W) = \frac{nm(n+m+1)}{12}$  ebből számolhatóak a kritikus értékek