9. előadás, 2022. április 7.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Áringadozások előadás

Véletlen mátrixok: fő kérdések

- Véletlen $N \times N$-es mátrix, precízebben: $X : \Omega \to M_{N\times N}$ mérhető leképezés (a mátrixokat euklideszi térként elképzelve)
- N nagy (pl. részvényhzamok kovarianciamátrixa), így az $N \to \infty$ határérték az érdekes
- Példa
  - Legyen X_{ij} szimmetrikus ($X_{ij} = X_{ji}$), független, azonos normális eloszlásúak (Wigner mátrix)
  - $X^T X/T$ (X $N \times T$-es mátrix): Wishart mátrix, ez felel meg a kovariancia mátrix becslésének (ez $N \times N$-es)
- A sajátértékek is valószínűségi változók. Nem könnyű az eloszlásukat egyesével meghatározni, de a spektrum (a sajátértékek halmaza) már vizsgálható

Határérték

- Legyen X $N \times N$-es szimmetrikus mátrix független standard normális eloszlású elemekkel (Wigner mátrix). X spektruma N elemű: $\lambda_i (i = 1, \ldots, N)$.
- Legyen
$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_i)$$
- A Wigner mátrixra a spektrum határértéke:
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i/(2\sqrt{N})} = \nu$$
ahol ν a Wigner (félkör) eloszlás (Wigner, 1950), melynek sűrűségfüggvénye
$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}$$
ha $-1 < \lambda < 1$.

A bizonyítás ötlete

- Legyen
$$\nu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{2\sqrt{N}}, \quad Y_{Nk} = \int x^k d\nu_N$$
valószínűségi változó (ν_N véletlen mérték)
- Belátható, hogy $E(Y_{Nk}) \to \int x^k d\nu$ ahol ν a Wigner-eloszlás és $D^2(Y_{Nk}) \le \frac{c_k}{N^2}$
- A Borel Cantelli lemma miatt
$$P\left(|Y_{Nk} - E(Y_{Nk})| > \frac{1}{N^{1/4}} \text{végtelen sokszor}\right) = 0$$
- Emiatt a ν_N feszes, bármely részsorozata határértékének a momentumai egyértelműek

Carleman feltétel

- Ha
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^{1/2k}} = \infty$$
akkor legfeljebb egy valószínűségi változó létezik, amelynek a momentumai éppen a μ_k értékek.
- Biz.: ekkor a karakterisztikus függvényt előállítja a Taylor sorfejtés
- A Wigner eloszlásra teljesül a feltétel
- Általánosítások
  - A bizonyítás átvihető nem normális eloszlású mátrixelemekre is, elég, hogy iid-k és $E(X_{ij}) = 0$ és $E(X_{ij}^2) = 1$ ($i \leq j$), és szimmetrikus a mátrix
  - Ha a mátrix elemei nem véges szórású stabilis eloszlások, akkor a spektrum határeloszlása nem korlátos (hatványrendben cseng le)

Wishart mátrix

- Legyen X $N \times T$-es mátrix, elemei
  - független, azonos eloszlásúak
  - 0 várható értékkel és
  - 1 szórásnégyzettel
  - $\kappa = E(X_{ij}^4)$
- Ekkor $W = X^T X/T$ esetén
  - $E(W_{ij}) = 0$, ha $i \neq j$ és 1, ha $i = j$ (jel.: δ_{ij})
  - $D^2(W_{ij}) = (1 + (\kappa - 2)\delta_{ij})/T$

Elfajuló határeloszlás

- $D^2(W_{ij}) \to 0$, ha N fix, $T \to \infty$ és így $W_{ij} \to I$.
- Ez akkor is igaz marad, ha $T \to \infty$ és $N \to \infty$ úgy, hogy $N/T \to 0$
- Ha $T < N$, W_{ij} elfajuló, a 0 sajátértékek súlya $(N - T)/N$. Ha tehát $N \to \infty$ úgy, hogy T konstans, akkor a spektrum a 0-hoz tart (elég: $N/T \to \infty$).
- Nem triviális határeloszlás tehát csak az $N/T \to c$ esetben várható

Marchenko-Pastur tétel (1967)

- Tétel: Legyen X $N \times T$-es ($T > N$) független, azonos eloszlású, 1 szórású, 0 várható értékű elemekből álló véletlen mátrix,
- $W = X^T X/T$ pedig a hozzátartozó Wishart-mátrix.
- Ekkor W spektrálsűrűsége $\rho_{N;T}(\lambda)$ $N \to \infty$ és $N/T = r < 1$ konstans esetén
$$\frac{1}{N}\rho_{N;T}(\lambda) \to \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{r\lambda} I_{\{\lambda_- < \lambda < \lambda_+\}}$$
ahol $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{r})^2$. Ez a Marchenko-Pastur eloszlás
- A Wigner-mátrixokhoz hasonlóan tehát a Wishart mátrixok spektruma is egy determinisztikus függvényhez tart.

Tulajdonságok

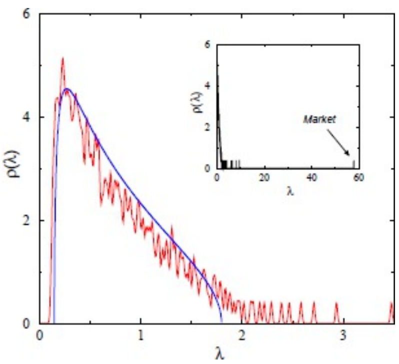
- A sűrűség tartója a $[\lambda_-, \lambda_+]$ korlátos intervallum
- $r \to 0$ esetén
$$\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{r})^2 \to 1$$
tehát az 1-ben elfajult eloszláshoz tart (a korábbiakkal összhangban).
- $r > 1$ esetén pedig a határeloszlás a 0-ban elfajult és a fenti tétel szerinti eloszlás keveréke
- $r \to 1$ ($T \to N + 0$) esetén
$$\lambda_- = (1 - \sqrt{r})^2 \to 0$$
hiszen az $N > T$ esetben a mátrix nem teljes rangú, így zérus sajátértékek jelennek meg.

Alkalmazás a kovariancia becslésére

- A becslés:
$$Z_{it} = X_{it} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{it}$$
jelöléssel
$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} Z_{it} Z_{jt}$$
- Erre is alkalmazható a Marchenko- Pastur tétel aszimptotikája
- De a gyakorlatban a mátrix elemei nem függetlenek!

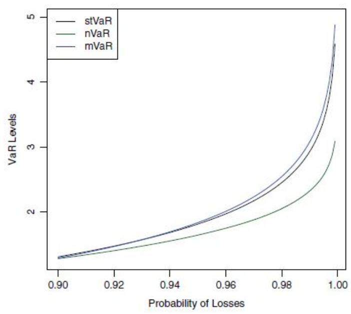
Gyakorlati alkalmazás

- Tapasztalati spektrum a S&P 500 index 406 részvényére és az MP eloszlás illesztése
- Külön ábrán látható a legnagyobb sajátérték
- A közepes (szektorális hatásokat leíró) sajátértékek eltávolítása után is marad szisztematikus eltérés az MP eloszlástól



Kockázati mértékek

- Lehetséges mérőszámok:
- D (szórás, esetleg csak a veszteségre)
- VaR (a veszteség magas kvantilise mi az, amennyinél többet pl. várhatóan legfeljebb egy évben egyszer vesztünk)
- cVar (várható veszteség, ha a VaR feletti veszteség ér bennünket)
- mVaR (módosított képlet, a magasabb momentumok is szerepelnek benne)



ábra: mVaR, tényleges VaR és a normális eloszláson alapuló VaR, amikor a tényleges eloszlás ferde t-elo.

Koherens kockázati mérték tulajdonságai

- Additivitás: $R(X + c) = R(X) + c$
- Homogenitás: $R(aX) = aR(X)$
- Monotonitás: $X \leq Y$ esetén $R(X) \leq R(Y)$
- Szubadditivitás (konvexitás): $R(wX + (1 - w)Y) \leq wR(X) + (1 - w)R(Y)$ Azaz a diverzifikáció előnyös! Szabályozói oldalról: nem ösztönöz részekre bontásra.
- Ezt a VaR nem teljesíti. Példa: $F_Z(1) = 0,91$, $F_Z(90) = 0,95$, $F_Z(100) = 0,96$, $Z = X + Y$: $X = \{Z : Z < 100\}$, $Y = \{Z : Z > 100\}$ $VaR(X) = 1$, $VaR(Y) = 0$, de $VaR(Z) = 90$

Koherens kockázati mérték tulajdonságai/2

- Ha elliptikus a veszteség-eloszlás, akkor már konvex a VaR
- Becsülhető: a VaR esetén több nemparaméteres módszer is alkalmazható
  - Empirikus kvantilissel (nem robusztus)
  - Kvantilisek súlyozott átlagával
- Lényeges: fogadja el a felügyelet a módszert

CVaR

- Precíz definíció több is lehet:

$$C_{\alpha-} = E(X|X \geq VaR_\alpha)$$

$$C_{\alpha+} = E(X|X > VaR_\alpha)$$

- Folytonos esetben ezek egybeesnek.
- Tulajdonságok:

$$C_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta d\beta = \min_C \left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{\alpha} E(X - C)^+ \right\}$$

- A CVaR tulajdonságai
  - Koherens kockázati mérték
  - Zárt: $X_n \to X$ és $R(X_n) \leq 0$ esetén $R(X) \leq 0$
  - Viszont nem könnyű a becslése, ha nincs megalapozott paraméteres modellünk

A modellek összehasonlítása

- A becsült kockázati mérték függ a választott modelltől
- Példa: részvények napi loghozama, az érték 10,000; évi 20% a volatilitás (normális vs t_4-ez vastag szélű eloszlás)

α	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
VaR_α (norm. elo.)	162,1	208,1	247,9	294,3	325,8
VaR_α (t_4 elo.)	137,1	190,7	248,3	335,1	411,8
ES_α (norm. elo.)	222,0	260,9	295,7	337,2	365,8
ES_α (t_4 elo.)	223,4	286,3	356,7	465,8	563,5

Portfólió-optimalizálás

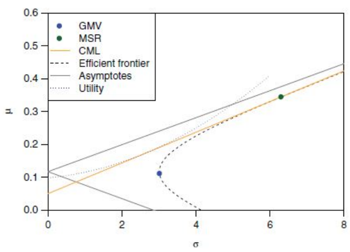
- Cél: minél nagyobb várható hozam elérése
- De: közben a kockázat legyen minél kisebb
- Kompromisszum: elvárt hozamot érje el a várható érték
- Közelítések: egy adott értékpapírból tetszőleges valós (általában nemnegatív) számú lehet
- Feltesszük, hogy az árakat nem befolyásolja a kereskedésünk (likvid piac)
- Feltesszük, hogy nincsenek tranzakciós költségek

Portfólió optimalizálás

- Tegyük fel, hogy a portfólió szórásnégyzetének minimumát keressük:
$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j$$
- A feltétel: $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$
- A megoldás:
$$w_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^{-1}}{\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk}^{-1}}$$
- A Markowitz-féle feladat:
  - Az adott hozamszinthez tartozó hatékony portfóliót keressük: $\min_{w \in \Pi} R(w)$
  - A feltételek: $\sum_{i=1}^{N} E(w_i Y_i) = \mu$, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$

Alternatívaks

- Hatékony átlag-szórásnégyzet portfóliókat a hiperbolán lehet találni
- Kockázatmentes befektetésünk is lehet
- Általános hasznossági függvények is használhatóak
- A Sharpe-hányados is maximalizálható: $E(\mu_p - \mu_r)/\sigma_p$, ahol μ_p a portfólió hozama és σ_p a portfólio szórása



ábra: A szórásnégyzet-optimális portfólió és a maximális Sharpe-hányadosú portfólió.

Gyakorlati problémák

- Nem ismert a hozamok eloszlása, de még az eloszlás paraméterei (várható érték, szórás) sem
- A paraméterbecslések eltérnek az elméleti értéküktől, így a kapott optimum is eltér a valóditól
- A súlyok véletlen hibával terheltek
- A kockázat magasabb lesz a valódi optimum kockázatánál
- Kérdés: mekkora ez az eltérés?
- Ha van elképzelésünk az eloszlásokról, akkor szimulálhatunk adatokat

Szimuláció

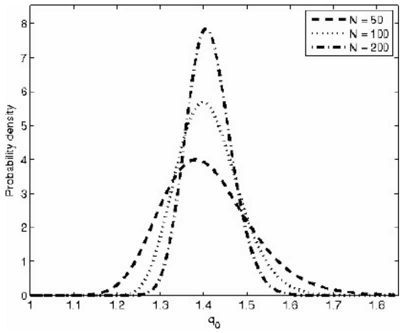
- T hosszú adatsort generáltunk
- A szimulációból becsült portfólió: $\hat{w}$. (A valódi optimum: w.) Mérőszám:

$$q_0 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{w}_i\hat{w}_j\sigma_{ij}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_iw_j\sigma_{ij}}}$$

  a becsült és a tényleges optimum gyökének hányadosa
- $q_0 \geq 1$, megmutatja, hogy mekkora a kockázatnövekedés a becslési hiba miatt.
- q_0 is valószínűségi változó, tehát a jellemzői (várható érték, szórás) a legfontosabbak

q_0 tulajdonságai

- Legyen N/T konstans és $N \to \infty$. Ekkor $D(q_0) \to 0$, $q_0 \to E(q_0)$.

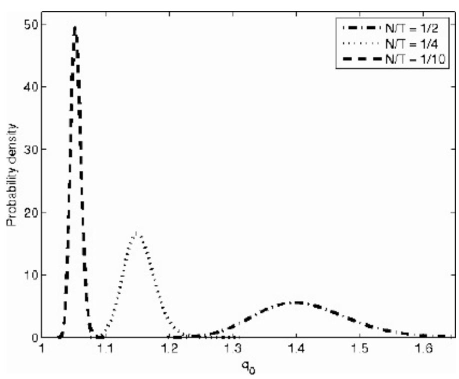


ábra: q_0 eloszlása különböző N értékekre. $N/T = 0,5$

q_0 tulajdonságai/2

- Ha N konstans és T csökken, akkor q_0 várható értéke és szórása is nő
- Ha $N/T > 1$, a feladat nem oldható meg, mert a kovarianciamátrix nem invertálható
- Ha $N < T$, a feladat megoldható, de $N/T \to 1$ esetén $q_0 \to \infty$
- Ha N konstans és $T \to \infty$, akkor $q_0 \sim (1 - N/T)^{-1/2}$, függetlenül a várható értékektől és szórásoktól

q_0 tulajdonságai/3



ábra: q_0 N/T függvényében, $N = 100$

Gyakorlati alkalmazás

- Ha tehát N elég nagy (általában $N > 100$ már elég), akkor a hiba becsülhető
- $q \sim (1 - N/T)^{-1/2}$
- Ebből kiszámolható az adott hibához tartozó szükséges mintaelemszám: $T = N/(1 - 1/q_0^2)$
- Például $N = 100$, $q_0 = 1,2$ esetén $T = 328$, N-ben lineárisan nő
- De kisebb hibatűrés, több részvény esetén jóval hosszabb adatsor kellhet
- Viszont ilyen időtávon a stacionaritás biztosan nem teljesül
- Tehát a portfólióválasztási probléma megoldása még az alkalmazott idealizált feltevések mellett is jelentős instabilitást mutat
- Ha nem csak a kockázatot, hanem magukat a súlyokat tekintjük, a helyzet még rosszabb, az ingadozás tipikusan több száz százalék. Tehát ez a feladat szinte reménytelen

Gyakorlati megfigyelések

- A hozamok empirikus kovarianciamátrixának tipikusan egy nagy sajátértéke van
- Az ehhez tartozó bázisportfólió döntően pozitív elemekből áll
- Azaz ez a kollektív ingadozás
- Elméleti háttér: Frobenius-Perron tétel. Eszerint pozitív elemekből álló pozitív definit mátrix esetén a legnagyobb sajátérték egyszeres és a megfelelő sajátvektor elemei pozitívak
- Bár az empirikus kovarianciamátrix nem minden eleme feltétlenül pozitív, döntő többségük az, és a tétel ekkor is érvényben marad

További sajátértékek

- Keressük meg azt az alacsonyabb dimenziós alteret, ami a variabilitás döntő részéért felelős
- Ha k dimenziós, akkor a bázisa a k legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorból fog állni
- A főkomponensek számát meg lehethatározni az empirikus spektrumra illesztett Marchenko-Pastur eloszlásból - azokat használva, amik kívül esnek az elfogadási tartományon
- A további sajátértékek helyett használjuk az átlagukat. Tehát az új kovariancia mátrix:

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l v_i^{(l)} v_j^{(l)} + \overline{\lambda} \sum_{l=k+1}^{N} v_i^{(l)} v_j^{(l)}$$

  where $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N$ a sajátértékek, $v^{(1)}, \ldots, v^{(N)}$ pedig a hozzájuk tartozó sajátvektorok
- Tehát a legkisebb sajátértékek nagyobbak lettek

Konklúzió

- Így a feladat $T < N$ esetére is megoldhatóvá válik, mert a 0 sajátértékek is pozitívvá válnak
- Eltűnik a divergencia az $N/T = 1$ helyen, a q_0 nem lesz túl nagy, még akkor sem ha N/T kicsi.
- De a portfólió súlyok ingadozása nem csökken számottevően
- Vannak más módszerek is, mint pl. a Lasso

Hivatkozások

- M. Potters, J.-P. Bouchaud, and L. Laloux. Financial applications of random matrix theory: old laces and new pieces. 2005.
- J. Fan, Y. Liao, and M. Mincheva: High dimensional covariance matrix estimation in approximate factor models. 2011.
- J.P. Bouchaud, M. Potters: Financial Applications of Random Matrix Theory, a short review. 2009.
- B. Valko's lecture: `http://www.math.wisc.edu/~valko/courses/833/2009f/lec_4_5.pdf`
- A.J. McNeil, R. Frey and P. Embrechts: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, 2005.
- Pfaff, B.: Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization...
- Dowd, K.-Blake, D.: After VaR. The theory and estimation of quantile-based risk measures, 2006.
- A. Kempf and C. Memmel. On the estimation of the global minimum variance portfolio, 2003.
- Varga-Haszonits I.:Instability of Risk Measures PhD thesis, 2009