2. előadás, 2022. február 17.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Áringadozások előadás

Klasszikus tétel többdimenzióban

- A klasszikus esetben ($\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n, \ldots$ iid, véges szórású) többdimenziós normális eloszlás a standardizált összeg határeloszlása:
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i - \underline{\mu}}{\sqrt{n}} \to N(0, \Sigma)$$
ahol $\underline{\mu} = E(\underline{X})$ és $\Sigma = cov(\underline{X})$.
Segédeszköz: többdimenziós karakterisztikus függvény
$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) := E(e^{i\underline{t}^T \underline{X}})$

Többdimenziós stabilis eloszlások

- Egy d dimenziós stabilis eloszlás karakterisztikus függvénye:
$$\phi(\underline{t}) = \exp\{-I(\underline{t}) + i\underline{t}^T \underline{\mu}\}$$
ahol
$$I(t) = \int_{S_d} \psi(\underline{t}^T \underline{s}) \Gamma(d\underline{s}).$$
S_d a d-dimenziós egységgömb felszíne, Γ véges mérték S_d-n, $\underline{\mu}$ d-dimenziós vektor és
$$\psi(u) = \begin{cases} u^{\alpha}(1 - i\,\mathrm{sign}(u)\tan\{\pi\alpha/2\}) & : \alpha \neq 1 \\ u(1 - 2i\,\mathrm{sign}(u)\ln(u)/\pi & : \alpha = 1 \end{cases}$$

Tulajdonságok

- 1 dimenziós vetületek ($\underline{u}^T \underline{X}$) eloszlása stabilis eloszlás, ugyanazzal az α paraméterrel. Ezek meghatározzák a d-dimenziós eloszlást
- $\underline{X} - \underline{\mu}$- re már $\underline{\mu} = \underline{0}$, tehát ez feltehető
- Független komponensű esetben $\Gamma = \gamma_1 \delta(\underline{s}_1) + \cdots + \gamma_d \delta(\underline{s}_d)$
- ($\underline{u}^T \underline{X}$) skálája u függvényében $\gamma(\underline{u}) = \left(\int_{S_d} |\underline{u}^T \underline{s}|^{\alpha} d\Gamma(\underline{s}) \right)$ az ún. skálafüggvény
- a többi paraméter-függvény is meghatározható

Kapcsolat az eloszlással

Legyen $C(A)$ az A által generált kúp:

$$C(A) = \{r\underline{a} : r > 0, \underline{a} \in A\}, A \subset S_d$$

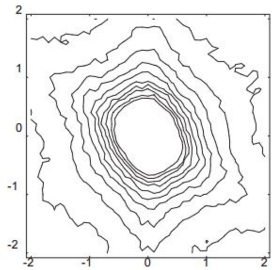
Ekkor

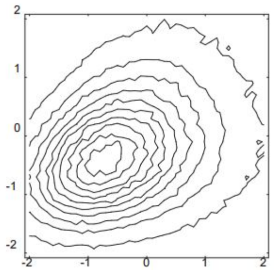
$$\lim_{r\to\infty} \frac{P(\underline{X} \in C(A), |\underline{X}| > r)}{P(|\underline{X}| > r)} = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(S_d)}$$

- Azaz aszimptotikusan az r-nél nagyobb megfigyelések A irányba esésének valószínűsége megegyezik az irány Γ-szerinti valószínűségével
- Konkrét számítások az inverziós formulával végezhetőek

Szimuláció

- Véges sok pontra koncentrált spektrálmértéknél egydimenziós stabilisokból.
- Nagyon sok megfigyelés kell a jó illeszkedéshez! 10^6 megfigyelésből a sűrűségfv kontúrjai:





Nemparaméteres becslés

- Magas dimenzióban egyelőre túl nagy a számításigény - és nem elég az adatok mennyisége (a tipikus pénzügyi alkalmazásoknál)
- Kétdimenzióban:
  - A kúpok valószínűségéből becsülhető $\Gamma(A)$
  - Empirikus karakterisztikus fv-ből I becsülhető, ezután (a véges tartójú esetre) a lineáris egyenletrendszer megoldásából kapjuk a becslést Γ-ra.

Paraméteres családok

- Elliptikus stabilis eloszlások:
  - a skálafüggvényük $\gamma(\underline{u}) = \{uRu^T\}^{\alpha/2}$, ahol R pozitív definit $d \times d$ mátrix.
  - Másik karakterizáció: $X \sim S^{1/2}Z$, ahol S $(\alpha/2, 1, \gamma, 0)$ stabilis, $Z \sim N(0, R)$.
  - Előnyük: $2 + d(d + 1)/2$ paraméterrel megadhatók
- $\Gamma = \sum \gamma_i$ is lehet jó modell, ahol γ_i paraméteres eloszlás S-en

Modellezés a gyakorlatban

- Egydimenziós vetületekre stabilis eloszlások illesztése
- Ha elfogadható az illeszkedés, akkor a következő lépés a a paramétereik vizsgálata
- Feltétel: α azonos kell, hogy legyen minden irányban

A maximum eloszlása

- Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ iid, Felo.fv-el. $M_n := \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Az M_n elo.fv-e F^n.
- Legyen $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Ekkor $M_n \to x_F$. Ez nem túl informatív!
- Feltétel a $P(M_n \leq u_n)$ konvergenciájára:

$$P(M_n \leq u_n) \to \exp\{-\tau\} \iff n(1 - F(u_n)) \to \tau.$$

- Megj.: Az állítás kapcsolódik a binomiális eloszlás Poisson határeloszlásához: az u_n értéknél nagyobb mgfigyelések száma Binom$(n, 1 - F(u_n))$ eloszlású
- Ha van u_n sorozat egy adott $\tau*$, értékhet, akkor van bármelyik τ-hoz is
- Következmény: ha $F(x_F) - F(x_F-) > 0$, akkor $P(M_n \leq u_n) \to \delta$, ahol vagy $\delta = 0$ vagy $\delta = 1$

A diszkrét eset, példák

- A következmény miatt nincs nemelfajuló határeloszlás az M_n-re olyan diszkrét eloszlásokra melyekre x_F véges.
- A következőkben analóg feltételt adunk az $x_F = \infty$ esetre, diszkrét eloszlásokra.

Tétel

Legyen F eloszlásfüggvény, melyre $x_F = \infty$ és legyen $\tau > 0$. Létezik u_n sorozat, melyre $n(1 - F(u_n)) \to \tau$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{1 - F(x_F)}{1 - F(x_F-)} = 1$$

- Következmény:nincs megfelelő normáló sorozat a Poisson, és a geometriai (negatív binomiális) eloszlásra

Határeloszlástétel a maximumokra

Tétel (Fisher és Tippet, 1928)

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, azonos eloszlású, $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ha vannak $\{a_n\}$ és $\{b_n\} > 0$ sorozatok, hogy

$$P\Big(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq z\Big) \to G(z) \text{ ha } n \to \infty$$

valamilyen nem-elfajuló G eloszlással, akkor ez a G szükségképpen max-stabilis (vagy más néven extrém-érték eloszlás)

$$G(x) = \exp\left\{-\Big(1 + \xi\frac{x - \mu}{\sigma}\Big)^{-\frac{1}{\xi}}\right\},$$

ahol $1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma} > 0$ ha $\xi \neq 0$. $\xi = 0$ esetén $G(x) = \exp(-\exp(-x))$.

A max-stabilitás: minden n-hez létezik a_n, b_n, hogy $F^{(n)}(x) = F(a_n x + b_n)$.

Típusok

A normalizált maximumok lehetséges határeloszlásainak az eloszlásfüggvényei:

- Frechet: $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ (x>0) α pozitív paraméter.
- Weibull: $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha)$ (x<0)
- Gumbel: $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$
- Kapcsolat az eloszlások között:

$$X \sim \Phi_\alpha \iff \ln X^\alpha \sim \Lambda \iff -X^{-1} \sim \Psi_\alpha$$

- A normáló tényezők (legyen X max-stabilis):
  - Frechet: $M_n \sim n^{1/\alpha} X$
  - Weibull: $M_n \sim n^{-1/\alpha} X$
  - Gumbel: $M_n \sim X + \ln n$.

A bizonyítás vázlata

- $[\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) - a_n]/b_n$ eloszlásfve: $F^n(b_n x + a_n)$
- $F^n(b_n x + a_n) \to G(x)$ pontosan akkor, ha $-n\log(F(b_n x + a_n)) \to -log(G(x))$
- Ebből differenciálegyenlet
- Megoldás visszahelyettesítése

Egy kis történelem

- Eredeti tétel a max-stabilis eloszlásokról: Fisher-Tippet (1928)
- Általánosított extrém-érték eloszlás: Jenkinson (1953):

$$G(x) = exp\left\{-\left(1+\gamma\frac{x-a}{b}\right)^{-1/\gamma}\right\},$$

  ha $\left(1+\gamma\frac{x-a}{b}\right) > 0$.
- Frechet(α) (Φ_α) megfelelője: GEV($1/\gamma$)
- Vonzási tartományok karakterizációja: Gnedenko (1943) $1 - F(x) \sim x^{-\gamma}L(x)$ a GEV($1/\gamma$) vonzási tartományába tartozik
- Megjegyzés: ha a minimumok eloszlására vagyunk kiváncsiak, akkor tekintsük az ellentettek maximumát

Megjegyzések

- Az eredmények hasonlóak a stabilis eloszlások karakterisztikus függvényeihez.
- Érdekes kérdés: adott F eloszlásfügvény esetén melyik határeloszláshoz konvergál az F eloszlású minta normalizált maximuma?
- Nem minden esetben lehet normálni:
  - Diszkrét eloszlásokra oszcillálhat a maximum eloszlása.
  - Folytonos eloszlásra ellenpélda: $F(x) = exp\{-x - sinx\}$

A normálhatóság feltétele

Folytonos eloszlásokra az eloszlásfüggvény reguláris viselkedése szükséges a felső végpont közelében (teljesül minden fontos eloszlásra):

- F a γ paraméterű Fréchet eloszlás max-vonzási tartományához tartozik ($F \in MDA(F_\gamma)$), akkor és csak akkor, ha $1 - F(x) \sim x^{-\gamma} L(x)$ (L lassú változású függvény: $L(cx)/L(x) \to 1$ ha $x \to \infty$). Példa: Cauchy
- $F \in MDA(W_\alpha)$, akkor és csak akkor, ha $x_F < \infty$ és $1 - F(x_F 1/x) \sim x^{-\alpha} L(x)$. Példa: $U[0;1]$
- A Gumbel MDA jellemzése bonyolultabb, lényegében az exponenciális lecsengésű eloszlások tartoznak ide (példa: exponenciális, normális).

Vonzási tartomány: biz.vázlat

- Az egyszerűbb irány: ha a túlélésfv. reguláris változású, akkor $F \in MDA(F_\alpha)$.
- Legyen $a_n = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$.

$$n\overline{F}(a_n x) \sim \frac{n\overline{F}(a_n x)}{n\overline{F}(a_n)} \to x^{-\alpha}$$

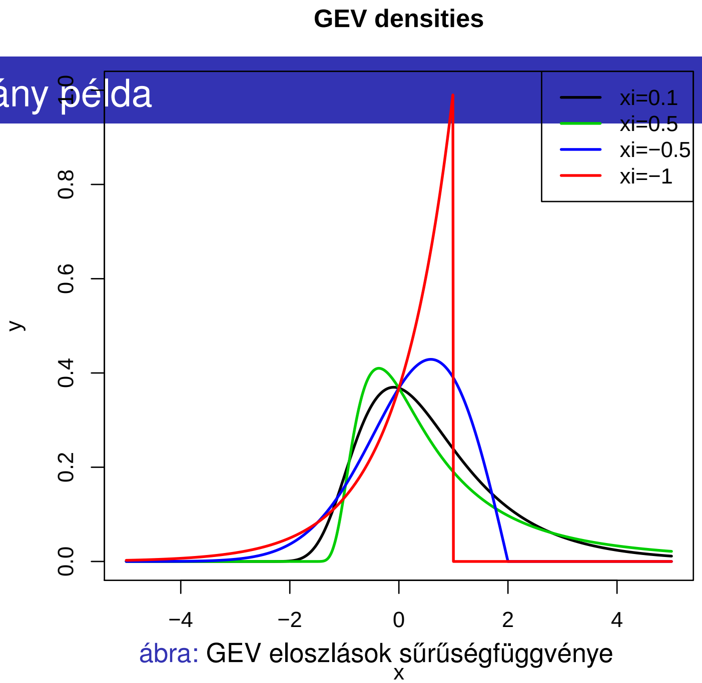
($n \to \infty$), ha $a_n \to \infty$ és így $x > 0$-ra

$$P(M_n < a_n x) = F^n(a_n x) = \exp\{n \ln(1 - \overline{F}(a_n x)\} \to \exp\{-x^{-\alpha}\}$$

ha $n \to \infty$.

- Az $x < 0$ esetben, $F^n(a_n x) \to 0$.

Néhány példa



ábra: GEV eloszlások sűrűségfüggvénye

VaR, visszatérési szint

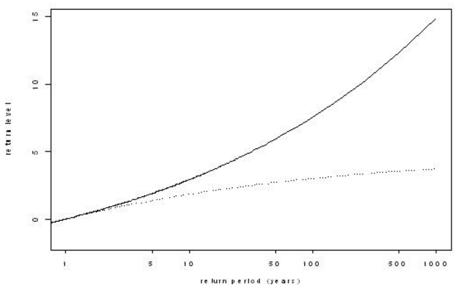
GEV p-kvantilise:

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{1 - y_p^{-\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ \mu - \sigma \log(y_p), & \gamma = 0 \end{cases}$$

ahol $y_p = \log(1 - p)$, $G(z_p) = 1 - p$ az az érték, amelyet átlagosan $1/p$ megfigyelésenként egyszer halad meg az adatsor. Annak valószínűsége, hogy $1/p$ -nél előbb megjelenik, nagyobb 1/2-nél! Ha $\gamma < 0$, akkor az eloszlás becsült felső végpontja $\mu - \sigma/\gamma$.

Viszatérési szint ábra

- z_p ábrázolva $\log(1-p)$ vel, logaritmikus skálán.
- Lineáris, ha $\gamma = 0$,
- Konkáv, a határértéke $\mu - \frac{\sigma}{\gamma}$ ha $\gamma < 0$
- Konvex, ha $\gamma > 0$



ábra: Folytonos: $\gamma = 0.2$, Szaggatott: $\gamma = -0.2$

ML paraméterbecslés

- A GEV sűrűségfv.-e:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma}\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}\exp\left\{-\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\},$$

  if $\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$.
- Innen a loglikelihood ffüggvény (ha $1+\gamma(x_i-\mu)/\sigma > 0$ minden i-re)

$$-n\log(\sigma) - \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\gamma\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left\{-\left(1+\gamma\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}.$$

- A maximum helyét numerikus módszerekkel lehet megtalálni (figyelni kell a kezőértékekre és arra, hogy a feltétel mindig teljesüljön)

Tulajdonságok

- Maximum likelihood:
  - Nincs explicit megoldása
  - A szokásos aszimptotikus tulajdonságokkal (optimalitás, normalitás) rendelkezik, ha $\gamma > -0,5$.
  - $\gamma < -1$ esetén nincs lokális maximuma a sűrűségfüggvénynek, a maximális mintaelem a globális maximum - ez konzisztens.
- Alternatív módszerek: probability-weighted-moments
- Rendezett mintán alapuló eljárások

Konfidencia tartomány

- A (számunkra érdekes) reguláris esetekben aszimptotikusan jó a normális határeloszlás alkalmazása
- De: a konvergencia általában nem túl gyors - különösen a legfontosabb, VaR esetén általában nem pontos
- Ezért célszerű alternatív módszerek alkalmazása