11. előadás, 2022. április 28.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Áringadozások előadás

A pénzügyi válság okai

- Átláthatatlan, ellenőrizhetetlen árazású termékek, például collateralized debt obligations (CDOs) - nincsenek benne a mérlegben sem
- Buborékok
- Hitelminősítők?
- Matematika?

Modellek szerepe

- Pénzügyi modellek: nemcsak a jelenségek leírását adják, hanem befolyásolják is őket
- Salmon (2009) újságíróként írt először a Gauss kopula szerepéről a válságban

Gauss kopula pénzügyi alkalmazása

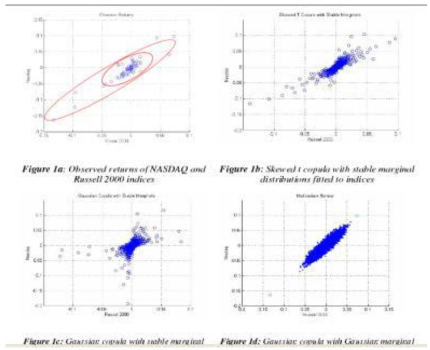
- Eredet: Vasicek modellje a homogén hitelportfolió csődjéről
- Ha a korreláció alacsony, a veszteség a várható értékhez közeli
- Magas korreláció esetén bimodális: 0 vagy 1 (azaz a portfolió úgy viselkedik, mint egyetlen eleme)
- CreditMetrics: szimulációk, többdimenziós normális eloszlások alapján
- David X. Li (1999): kopulák, élettartam-adatokkal való analógia alkalmazása:
- Peremeloszlások (túlélésfüggvények) modellezése
- Gauss kopula az összefüggőségekre

Az új megközelítés

- David X. Li (1999) alkalmazta a kopulákat, a túlélési adatokhoz való analógiák alapján:
- A peremeloszlások (túlélésfüggvények) modellezése
- Gauss kopula az összefüggőségekre
- Először a két-életes biztosításoknál alkalmazták ("törött szív szindróma": a házaspár egyik tagjának halála növeli a másik tagja halálának valószínűségét)
- Következő lépés: alkalmazás vállalatok csődvalószínűségére (fontos a CDO-k árazásánál)
- Szerepe volt az úgynevezett "szintetikus" CDO-knál is, ahol a részvényeket csak imitálták

Kétdimenziós modellezés

- A normális eloszlás kopulaként is rossz
- A ferde t-kopula a ferde t-eloszlásból származik



CDO-k árazása

- Collateralized debt obligations
- Igen jelentős piaca alakult ki
- Különböző tranche-okra osztva árulták (a kockázatosabb nagyobb hozamot igért)
  - Equity
  - Mezzanine (BBB)
  - Senior (AAA)
- A döntő kérdés itt is az összefüggőségek modellezése
- Egy időegységre modelleztek

Hedge

- A szokásos a delta-módszer, ehhez időbeni változás kell - számításigényes!
- Korrelációk becsléséhez kevés az adat
- Próbálkozások: visszamenőleges adatokból történő becslés
- Egyszerűsítés: faktor-modellek, feltételes függetlenség (V std.norm eloszlású faktor, F_i a túlélésfv, ρ a korreláció)

$$p_t^{i|V} = \Phi\left(\frac{-\rho V + \Phi^{-1}(F_i(t))}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

További lehetőségek

- Általában konstansnak tekintették a csőd esetén a megtérülési részarányt, de a válság óta ez is módosult
- "Correlation skewness" - reprodukálja a sztochasztikus korrelációs modell (Gauss kopulák keveréke)
- *t*-, Clayton-kopula alkalmazása

Példa

- Tfh 10 név van a kosárban, a hitelfeláruk 60-150 bázispont között egyenletesen oszlik el
- 5 éves lejárat,
- Csőd esetén 40%-os megtérülés
- Az összefüggőségek kalibrációja, hogy az első csődbemenetelre ugyanannyi legyen a díj

Rang	Gauss	Clayton	t(6)	t(12)
1	723	723	723	723
2	275	274	278	276
3	122	123	122	122
4	55	56	55	55
5	24	25	24	25
6	11	11	10	10
7	4.7	4.3	3.5	4.0

Nincs lényeges különbség

A veszteségek

- A krízis során bankonként
  - Md USd nagyságrendű veszteségek a CDO-kon
  - Több 10 Md nagyságrendű veszteségek az ABS CDO-kon (ingatlanfedezetű kötvények), mert az ingatlanár-buborék kipukkant és hirtelen nem maradt fedezet - ezek árazása nem az arbitrázsmentességen alapult, hanem cashflow alapú volt
- Kivétel: Goldman, aki máshogy árazott és még 2006-ban kiszállt

Buborékok: példák

- Tulipán-mánia (XVII. század, Hollandia): egy hagyma akár két hintó árát is érhette
- Arany-bányászati jogok (XVIII. század, Anglia, Franciaország)
- Építések (XIX. század, USA)
- Florida ingatlanspekuláció (1920-as évek)
- Dot kom buborék (2000-2002)
- Subprime krízis (2007)

Buborékok: módszerek

- Mi is egy értékpapír fair ára?
- Meg lehet határozni, feltéve, hogy nincs arbitrázs
- Fundamentális árnak fogjuk nevezni - teljes piacon definiáljuk, mert itt a kockázatsemleges martingál mérték egyértelmű
- Csak a legegyszerűbb esetet tekintjük, amikor a buborék egyetlen részvény ára

Buborékok: matematika

- Árfolyam modellezés: $dS_t = \sigma(S_t)dW_t + \mu(S_t)dt$
- Sztochasztikus a volatilitás. Arbitrázsmentes piacokon a kockázatsemleges mérték segítségével átírható:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma(S_u)dW_u$$

- Pontosan akkor alakul ki buborék, ha S szigorú lokális martingál (azaz lokális martingál, de nem martingál). Ennek karakterizációja:

$$\int_\alpha^\infty \frac{x}{\sigma^2(x)}dx < \infty$$

teljesül minden $\alpha > 0$-ra.

Tulajdonságok

- Buborék esetén nem érvényes a klasszikus tétel az amerikai és az európai opciók egyenértékűségéről
- A volatilitás növekedése esetén érdemes tesztelni
- A pozitív szigorú lokális martingál szupermartingál
- Tipikus realizációja:
- Gyors felfutás, majd gyors lezuhanás és alacsony értékeken ragadás

Lokális időn alapuló becslés

- h_n az ablakszélesség
- Legyen

$$L_T^n(x) = \frac{T}{2nh_n}\sum_{i=1}^n I\{|S_{t_i} - x| < h_n\},$$

$$\ell_T^n(x) = \frac{T}{2nh_n}\sum_{i=1}^n I\{|S_{t_i} - x| < h_n\}n(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2$$

- Ha $nh_n \to \infty$ és $nh_n^4 \to 0$, akkor $\ell_T(x)/L_T(x) \to \sigma^2(x)$
- A h_n -re vonatkozó feltétel túl szigorú (általában nincs elég adat)
- Általános probléma: a volatilitást csak a már megfigyelt értékekre tudjuk becsülni

Magfüggvényes becslés

- Magfüggvényes modell:

$$V_n^x = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(\frac{S_{i/n} - x}{h_n}\right) n \left(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}}\right)^2,$$

$$L_n^x = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(\frac{S_{i/n} - x}{h_n}\right)$$

- ahol h_n az "ablakszélesség", Φ kellően sima magfüggvény. $nh_n^2 \to \infty$ esetén $V_n^x / L_n^x \to \sigma^2(x)$
- Ha $nh_n^3 \to \infty$, akkor normális a határeloszlás

Tesztelés

- Paraméteres és nemparaméteres modellek együttesen alkalmazhatóak
- Egyszerű paraméteres modell: $\sigma(x) = \sigma x^{\alpha}$, ahol σ és α ismeretlen paraméterek.
- Tulajdonságok:
  - $1/2 < \alpha < 1$ esetén martingál
  - $\alpha > 1$ esetén szigorú lokális martingál
  - $\alpha = 1$ esetén geometriai Brown mozgás
- Ha σ becsléseire tudjuk ellenőrizni a feltételt, akkor σ is az adott osztályba tartozik

Példa (dotkom lufi)

- Kék, piros: nemparaméteres (magfüggvényes) becslések
- Zöld: paraméteres modell
- A paraméteres modell lokális martingál tulajdonságú, a többi becslés pedig e fölött halad, tehát a teszt bizonyítja a buborék jelenlétét

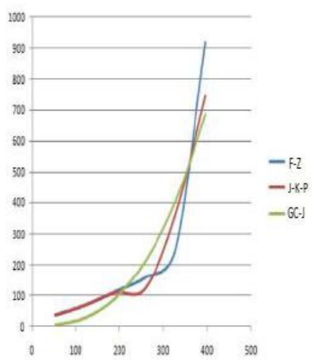
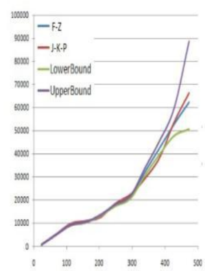
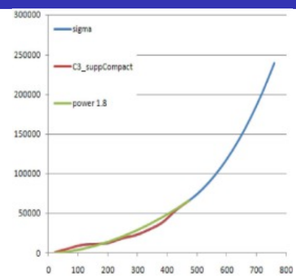


Figure 2: Lastminute.com. Estimates of $\sigma(x)$.

Példa (dotkom lufi)



ábra: Nemparaméteres becslés: nem egyértelmű



ábra: RKHS extrapoláció: mutatja a buborékot

Távlati célok:

- Termékek egyszerűsítése
- A buborékok real-time történő detektálása
- Felügyeletek szerepének növelése?

Gépi tanulás alkalmazásai

Motiváció

- Sok nagy adatbázis érhető el (pl. order book, perces adatok)
- Hatékony, gyors döntések nem hozhatóak meg manuálisan
- Algoritmikus kereskedés eléggé gyakori

Neurális hálók

- Konvolúciós hálózatok: mintázatok kiszűrésére alkalmasak (mint a képfeldolgozásnál)
- LSTM (Long-short term memory) hálózatok: idősoros elemzésekre
- Megerősítéses tanulás: dinamikus portfólió management

Hivatkozások

- D. MacKenzie and T. Spears (2012): The Formula That Killed Wall Street? The Gaussian Copula and the Material Cultures of Modelling
- X. Burtschell, J. Gregory and J.P. Laurent (2009): A comparative analysis of CDO pricing models
- R. Jarrow, Y. Kchia, and P. Protter (2011): How to Detect an Asset Bubble. SIAM J. Finan. Math., 2(1), 839865.
- Dixon et al.: Machine Learning in Finance (Springer, 2020)