10. előadás, 2022. április 21.

Zempléni András

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Természettudományi Kar
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Áringadozások előadás

GARCH motiváció

Az 1980-as évekre elegendő bizonyíték gyűlt össze, hogy a lineáris ARMA modellek nem felelnek meg a pénzügyi folyamatoknál megigyelt stilizált tényeknek.

Az ökonometriai modellezésben áttörést jelentett az Autoregresszív Feltételesen Heteroszkedasztikus (Autoregressive Conditionally Heteroscedastic, ARCH) folyamatok bevezetése (Engle 1982), amelyet rövidesen követett a GARCH (Bollerslev, 1986).
Definíció szerint, $\{X_t\}_{t\in Z}$ ARCH(q) folyamat, ha reprezentálható

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \cdot \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 \end{cases} \tag{1}$$

alakban, ahol $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \alpha_q > 0$, $\{\epsilon_t\}$ 0 várható értékű, egységnyi szórású innováció-sorozat és $\{\sigma_t^2\}$ a feltételes szórásnégyzete X_t-nek az $\Omega_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ természetes filtrációra.

GARCH modell: definíció

- $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ GARCH(p,q) folyamat, ha

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t \tag{2}$$

$$h_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{0i} X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{0j} h_{t-j} \tag{3}$$

  ahol ε_t ($t \in \mathbb{Z}$) i.i.d. szimmetrikus, egységnyi szórású val. változók, $\omega_0 > 0, \alpha_{0i} \geq 0, \beta_{0j} \geq 0$ ha $i = 1, ..., q$ és $j = 1, ..., p$. Általában $\kappa_{\varepsilon_t} = E({\varepsilon_t}^4) < \infty$ feltételt is megköveteljük.
- A paraméter vektor: $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{p+q+1})^T = (\omega, \alpha_1, ..., \alpha_q, \beta_1, ..., \beta_p)^T$
- A paramétertér: $\Theta = (0, \infty) \times [0, \infty)^{p+q}$.
- A paraméterek igazi értéke: $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_{01}, ..., \alpha_{0q}, \beta_{01}, ..., \beta_{0p})^T$ ismeretlen

GARCH modell: tulajdonságok

- Megvalósítja a stilizált tényeket
- Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ GARCH(p,q) folyamat másodrendben stacionárius, ha $\omega > 0$ és
$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1.$$
- A GARCH(1,1) a leggyakrabban használt
- Becslés: QML (normális eloszlást feltételez az innovációkra) konzisztens, aszimptotikusan normális (ha teljesül sok-sok feltétel, elsősorban a stacionaritás), ld. később
- Gyakorlatban kérdéses a stabilitása

QML a GARCH modellben

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ megfigyelések GARCH(p,q) folyamatból (erősen stacionárius megoldás).
- A normális kvázi-likelihood függvény, feltéve a $x_{1-q}, \ldots, x_0, \tilde{\sigma}^2_{1-p}, \ldots, \tilde{\sigma}^2_0$ kezdeti értékeket:

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} e^{-\frac{x_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}}.$$

ahol $(\tilde{\sigma}_t^2)_{t\geq 1}$ rekurziója:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2(\theta)$$

Tulajdonságok

Tétel

Ha $(\hat{\theta}_n)_{n\geq 1}$ QMLE teljesít regularitási feltételeket, a kezdőértékek

$$x_{1-q}^2 = \ldots = x_0^2 = x_1 \qquad \tilde{\sigma}_0^2 = \ldots = \tilde{\sigma}_{1-p}^2 = x_1^2.$$

akkor

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \theta_0.$$

Tétel

További regularitási feltételek esetén

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, (\kappa_\varepsilon - 1)J^{-1}),$$

$$J := E_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta^T}\right) = E_{\theta_0}\left(\frac{1}{\sigma_t^4(\theta_0)} \frac{\partial\sigma_t^2(\theta_0)}{\partial\theta} \frac{\partial\sigma_t^2(\theta_0)}{\partial\theta^T}\right).$$

GARCH folyamatok autokorrelációi

- A stilizált tényeknek megfelelően a négyzetek autokorrelációja nemnegatív
- Ha $\kappa \geq 4$, akkor a szokásos CLT érvényes rájuk, $1/\sqrt{n}$-nel arányos konvergencia-sebességgel
- $2 < \kappa < 4$ esetén sokkal lassabb a konvergencia A határeloszlás függ a paraméterektől, tehát például konfidencia intervallumok nem adhatók meg a szokásos módon

GARCH folyamatok extrémumai

- Reguláris változású, ha a zaj folyamatra enyhe feltételek teljesülnek (például akkor is, ha a zaj normális eloszlású)
- A kitevő itt is a $h(\kappa) = 1$ egyenlet megoldása
- Példa: a standard normáls eloszlással generált ARCH(1) folyamatra $\kappa = 1$
- GARCH(1,1) standard normális zajra ($\alpha_1 = 0.1$):

β_1	0.9	0.8	0.7	0.6
$\hat{\kappa}$	2	12	16	19

Extrémumok

- GARCH(1,1) t_4 eloszlású zajra ($\alpha_1 = 0.1$)

β_1	0.9	0.8	0.7	0.6
$\hat{\kappa}$	2.0	4.0	4.4	4.4

- A becslések igen bizonytalanok: 10^6 elemű szimulált mintákból számolva is marad bizonytalanság
- IGARCH(1,1) folyamatra (itt $\alpha_1 + \beta_1 = 1$) $\kappa = 2$
- A GARCH(1,1) erősen keverő

Tapasztalati példa: DJIA loghozamok

Különböző rendű ARCH/GARCH modelleket illesztettünk a DJIA adatsorra. Akaike Információs Kritérium alapján választható ki a legjobb modell

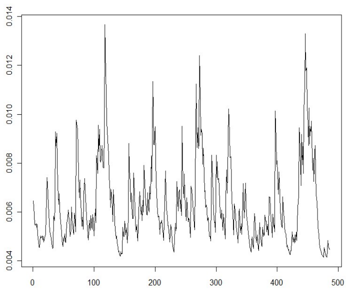
GARCH model QML estimation results

model	QMLE estimator $\hat{\theta}$	-logL($\hat{\theta}$)	Akaike IC
ARCH(1)	$\hat{\omega}=3.35 \cdot 10^{-5}$ $\hat{\alpha}=0.195$	-1771.03	-3538.06
ARCH(2)	$\hat{\omega}=2.56 \cdot 10^{-6}$ $\hat{\alpha}_1=0.195$ $\hat{\alpha}_2=0.206$	-1779.39	-3552.78
GARCH(1,1)	$\hat{\omega}=5 \cdot 10^{-6}$ $\hat{\alpha}=0.203$ $\hat{\beta}=0.686$	-1787.54	**-3569.08**
GARCH(1,2)	$\hat{\omega}=5.77 \cdot 10^{-6}$ $\hat{\alpha}_1=0.17$ $\hat{\alpha}_2=0.059$ $\hat{\beta}=0.643$	**-1787.64**	-3567.28
GARCH(2,1)	$\hat{\omega}=5.05 \cdot 10^{-6}$ $\hat{\alpha}_1=0.202$ $\hat{\beta}_1=0.686$ $\hat{\beta}_2=10^{-8}$ (!)	-1787.36	-3566.72

Bár $-\log L(\hat{\theta})$ a GARCH(1,2) modellt választaná, a büntetőtaggal megadott AIC kritérium szerint a GARCH(1,1) modell az optimális

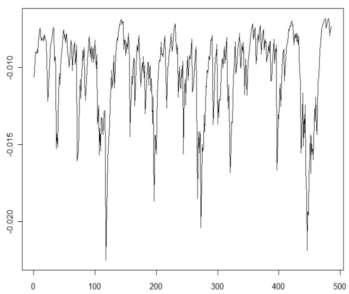
Tapasztalati példa (folyt.)

Megnézhetjük X_t feltételes szórásának időfüggését



Tapasztalati példa (folyt.)

Ebből nem konstans 95%-os VaR becslések adódnak



Megjegyzések

- Ahogy láttuk, a GARCH modelleket eredményesen lehet alkalmazni a pénzügyi idősorok dinamikájának leírására. Az R-ben lehetséges automatizált becslési eljárások bőséges információt adnak további statisztikai vizsgálatokhoz is
- Viszont gyakran tapasztalható, hogy a feltételes normalitás sem elég jó modell. A reziduálisok elemzése gyakran mutatja, hogy a zaj vastagabb szélű, és ekkor $\hat{\varepsilon}_t$ eloszlása ennek megfelelően illesztendő (például t (Student), Általánosított hiba-eloszlás 2-nél kisebb alakparaméterrel, Pareto, stb)
- A GARCH modelleket eredményesen lehet kombinálni a kopulákkal: a peremeloszlások paramétereinek becslése után (GARCH modellekkel), kiszámoljuk a reziduálisokat és modellezzük megfelelő kopulával

Hivatkozások

- M. Potters, J.-P. Bouchaud, and L. Laloux. Financial applications of random matrix theory: old laces and new pieces. 2005.
- J.P. Bouchaud, M. Potters: Financial Applications of Random Matrix Theory, a short review. 2009.
- B. Valko's lectures: `http://www.math.wisc.edu/~valko/courses/833/2009f/lec_4_5.pdf,.../lec_6_7.pdf`
- A.J. McNeil, R. Frey and P. Embrechts: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, 2005.
- Pfaff, B.: Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization...
- Dowd, K.-Blake, D.: After VaR. The theory and estimation of quantile-based risk measures, 2006.
- A. Kempf and C. Memmel. On the estimation of the global minimum variance portfolio, 2003.
- Varga-Haszonits I.:Instability of Risk Measures PhD thesis, 2009
- C. Francq-JM. Zakoian: Garch models (Wiley, 2010)