Extrém-érték modellezés a gyakorlatban

Zempléni András

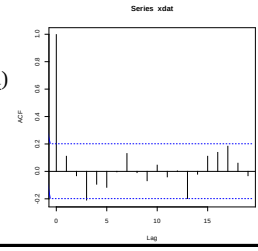
Val.modellek

2021. március 4.

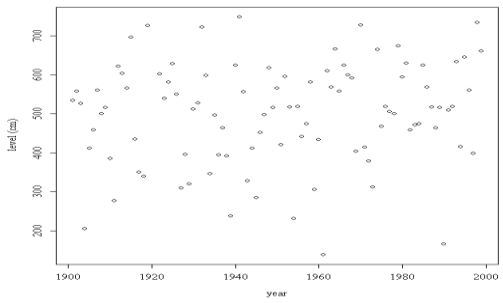
Függetlenség vizsgálata

- Tegyük fel, hogy megtisztítottuk adatainkat.
- A kiindulópont az évi maximumok függetlensége.

Autokorreláció függvény: $R(X_t,X_{t+k})$ a Záhony vízszint évi maximum sorozatára



Évi maximumok, Vásárosnamény



Küszöb fölötti csúcsok módszere (POT)

- Azok az események extrémek, amelyek meghaladnak egy rögzített, magas küszöböt
- Előnyei:
  - Több adatot lehet használni
  - A becsléseket nem befolyásolják kicsi "árvizek"
- Hátrányai:
  - Függ a küszöb megválasztásától
  - A declusterezés (annak eldöntése, hogy mely maximumok származnak egy eseményből) nem mindig egyértelmű.

Elméleti alapok

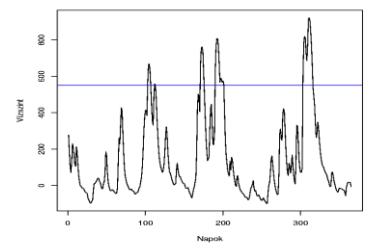
Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n$ független, azonos eloszlású val. változók. Ha ennek a sorozatnak a normalizált maximuma konvergál egy extrém-érték eloszláshoz (μ,σ,ξ paraméterekkel), akkor

$$P(X-u<y \mid X>u) \approx 1-(1+\frac{\xi y}{\tilde{\sigma}})^{-1/\xi}$$

ha y>0 és $1+\xi y/\tilde{\sigma}>0$ ahol $\tilde{\sigma}=\sigma+\xi(\mu-u)$

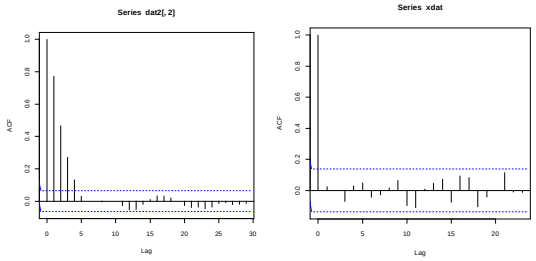
(Általánosított Pareto eloszlás, GPD.)

Az aszimptotika *n* és *u* végtelenhez tartása mellett érvényes.



Autokorreláció függvény, Záhony vízszint

baloldal: minden 400 fölötti értékre
jobb oldal: deklaszterezés után (a csúcsok)



Visszatérési szintek

Az általánosított Pareto eloszlás p-kvantilise:

$$x_p = u + \frac{\sigma}{\xi}\left[\left(\frac{1}{p}\zeta_u\right)^{\xi} - 1\right] \quad \text{, ha } \xi \neq 0;$$

$$x_p = u + \sigma \log\left(\frac{1}{p}\zeta_u\right) \quad \text{, ha } \xi = 0, \text{ ahol}$$

$\zeta_u = P(X > u)$. $\quad \hat{\zeta}_u = \frac{n_u}{n}$

Ha n_y az évente észlelt szint feletti maximumok átlagos száma$\Rightarrow$ T évente visszatérő az $1/T^*n_y$ kvantilis.

Ha $\hat{\xi} < 0$, akkor az eloszlás felső végpontja $\hat{x}_1 = u - \hat{\sigma}/\hat{\xi}$.

Küszöb választás

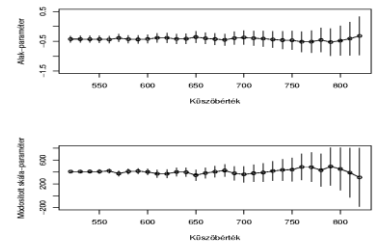
Átlagos meghaladás ábrája:

Tetszőleges u küszöbre ábrázoljuk az X-u átlagát (azokra a megfigyelésekre, amelyekre $X>u$) u függvényében.

Ha a Pareto modell igaz, ez a görbe közel lineáris.

A megmagyarázása nehéz lehet a megfigyelések maximumához közel megfigyelhető nagy ingadozása miatt.

Alternatíva: tekintsük a paraméterbecslések értékeit különböző küszöbök esetén.



Stacionaritás

- Kérdés, hogy az adatok valóban tekinthetők-e stacionáriusnak (időben homogénnek; alternatíva: lehet trend/periodikus komponens).
- Lehet klasszikus tesztekkel vizsgálni (pl. chi-négyzet).
- Az egyik módszert be is mutatjuk.

Nemparaméteres megközelítés

- Mann-Kendall trendteszt $S = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} sign(x_i - x_j)$
- Független, azonos eloszlású, egyezések nélküli esetre:
  ES=0, $\quad D^2(S) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{18}$
- Ha n nagy, S közelítőleg normális eloszlású. Alkalmazható már n>10-re is.

Néhány érték (a standardizált S-statisztika értékei)

- Évi maximumok

	vízállás	vízhozam
Szeged	0.235	-0.199
Záhony	0.203	
V.Namény	0.089	

- A napi maximális vízállásra (Záhony): S=-22.4. Miért? Az alacsony vízállásértékek lefelé mutató trendje az ok. Ugyanez az érték a vízhozamra: S=-2.47

Stacionárius sorozatok

- Ha nem teljesül a függetlenség (mint pl. az eredeti naponkénti méréseknél), a normalizált maximumok határeloszlása továbbra is GEV eloszlás, ha a függőség a távoli megfigyelések között 0-hoz tart. Az évi maximumokra a GEV modell tehát elméletileg is megalapozott.
- POT modellekre, a klaszter-maximumok használhatóak. (A klasztereket definiálni kell).

A nemstacionaritás esete

- Lineáris regressziós modellek beépíthetőek a paraméterekbe.
- Esetleg szétbontva a megfigyeléseket évszakokra, külön-külön teljesülhet a stacionaritás.

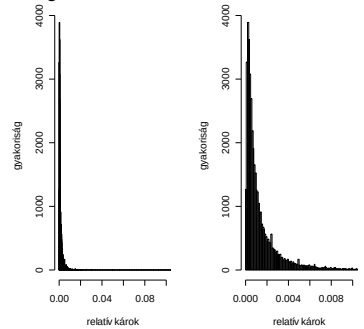
Alkalmazás: gépjármű felelősség biztosítás

- Adattisztítás (negatív károk, nem megfelelő időpontok, stb. kiszűrése.)
- Inflációs hatás elemzése (lényeges, mert a mintát azonos eloszlásúnak képzeljük).
  - Negyedéves eltolással 15 db 1 éves részre bontottuk az adatokat.
  - KSH fogyasztói árindex adatok nem megfelelőek (gyorsabb a kárkifizetés növekedése).

Az inflációs hatás becslése

- A kárkifizetési adatok mediánjaira (a kiugró értékek miatt az átlag nem megfelelő!) illesztett nemparaméteres simítás eredményeként adódott az „ágazati kárnövekedési ráta” a vizsgált tartományon.
- Ez tartalmazza
  - az inflációt,
  - a gépjármű-állomány megváltozásának hatását
  - minden más, trend jellegű kárnagyság-módosító hatást.
- Az adatok jelenértékre transzformálásához ezt ki kellett egészíteni az időszak elején és végén.

A jelenértékre transzformált adatok



Károk össz-száma:
kb. 38000.

Néhány alapstatisztika:
Medián: $7.9*10^{-4}$
Átlag: 0.002
Felső kvartilis: 0.0018
99%-os kvantilis:0.0187
99.9%-os kvantilis: 0.1

A biztosítási kockázat és az extrém-érték elemzés

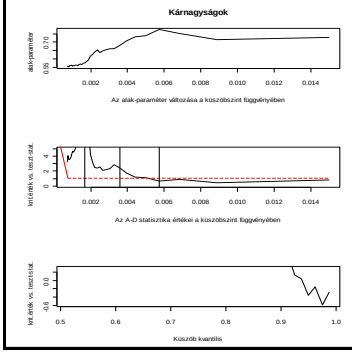
- A legnagyobb kockázatot a nagy károk jelentik. A mi esetünkben:

Kvantilis	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
Részarány	7.7%	22%	41.2%	53.1%	71.8%	87%

Azaz a kárkifizetés közel feléért a legnagyobb 5% a felelős.

- Nincsenek természetesen adódó blokkok (évi maximumok).

Alkalmazás a küszöbválasztáshoz



Olyan küszöböt választunk, melyre a próba elfogadja a GPD modell illeszkedését.

Az ábrából leolvasható, hogy 0.003 feletti szintek jönnek számításba.

A szokásos gond: torzítás (alacsony szintnél) vs. nagy szórás (magas szintnél)

Választásaink: 0.0035, 0.005

Modell diagnosztika

- Valószínűségi ábra (P-P plot), a pontjai:

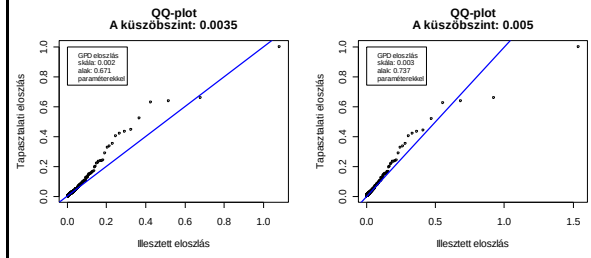
$$\{(\hat{F}(x_i^{(n)}), \frac{i}{n+1})\}$$

- Kvantilis ábra (Q-Q plot), a pontjai:

$$\{(x_i^{(n)}, \hat{F}^{-1}(\frac{i}{n+1}))\}$$

Mindkét esetben a pontok közel kell, hogy legyenek a fődiagonálishoz, ha jó az illeszkedés.

Pareto eloszlás illesztése az adott szintet meghaladó kárkifizetési adatokra



Nem jó az illeszkedés

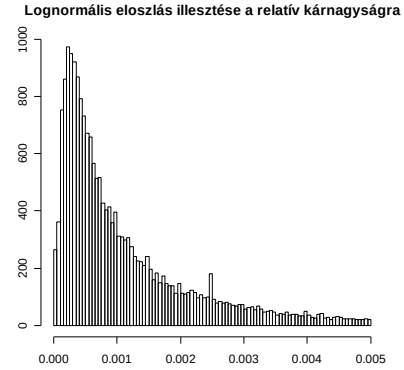
A kapott eloszlások ugyan véges várható értékűek, de a szórás végtelen.

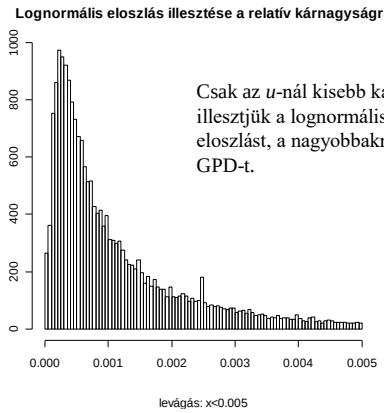
Alternatíva: lognormális eloszlás

- A sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- A paraméterek becslései:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)}{N}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\ln(x_i) - \mu)^2}{N}}$$

- Az illeszkedés nem jó a teljes adatsorra (túl gyors a lecsengése a ténylegesen fellépő nagy károkhoz képest).





Csak az u-nál kisebb károkra illesztjük a lognormális eloszlást, a nagyobbakra GPD-t.

Továbblépés

- A GPD illeszkedés nem volt megfelelő annak ellenére, hogy a statisztika – feltehetően elsősorban a közepesen nagy mintaelemek nagy számának és viszonylag jó illeszkedésének köszönhetően – elfogadta a GPD-modellt.
- Továbbfejlesztett modell: késlekedési időtől való függés figyelembe vétele.

A késlekedési idő

- A néhány, rendelkezésre álló adat egyike.
- Alapstatisztikái:
  - Átlag: 17 nap,
  - Medián: 4 nap,
  - Felső kvartilis: 7 nap
  - Maximum: 1515 nap.

Beépíthető a modellbe, feltételezéseink:

- Skálaparaméter változása: $\sigma(t) = \alpha \cdot t + \beta$ (t a késlekedési idő)
- Alakparaméter nem változik.
- Maximum likelihood becslési módszer most is alkalmazható.

Illeszkedésvizsgálat a háttérváltozót is tartalmazó modellben

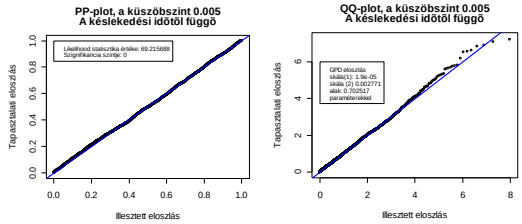
- A kvantilis (QQ) plot-ot módosítani kell:

$$\tilde{Y}_{t_i} = \frac{1}{\hat{\xi}} \log\left\{1 + \hat{\xi}\left(\frac{Y_{t_i} - u}{\hat{\alpha} \cdot t_i + \hat{\beta}}\right)\right\}$$

standard exponenciális eloszlású, ha teljesül a modell

A késlekedési időtől függő modell

- Skálaparaméter változása: $\sigma(t) = \alpha \cdot t + \beta$ (t a késlekedési idő)
- Alakparaméter nem változik
- Maximum likelihood módszer most is alkalmazható

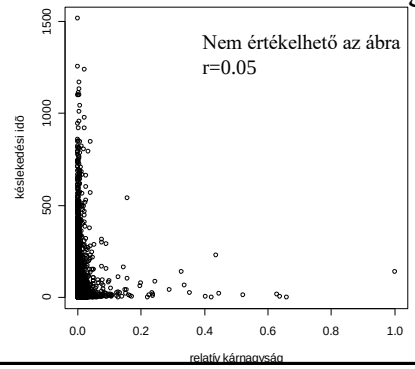


Modell szignifikanciavizsgálata

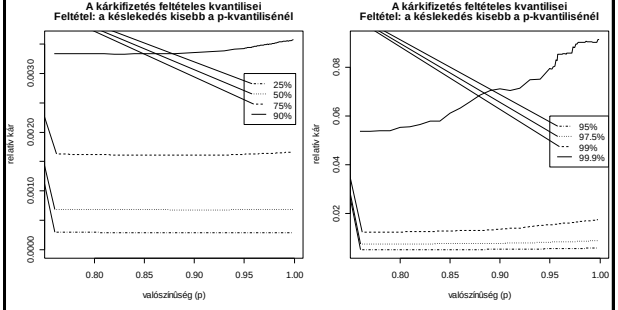
$$D = 2\{l_1(M_1) - l_0(M_0)\}$$

1 szabadságfokú χ^2 eloszlású, ha nincs szignifikáns lineáris trend a skálaparaméterre. Ennek az értéke most D=102.3, illetve D=69.21 , ami gyakorlatilag tetszőlegesen kicsi p mellett szignifikáns hatást mutat.

A késlekedési idő és a kárnagyság

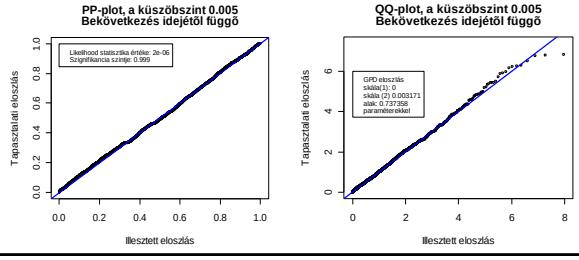


Az ábrák mutatják, hogy csak a magas kvantilisek érzékenyek a késlekedési időre – ezért kaptuk az erős összefüggést a Pareto eloszlás illesztésénél



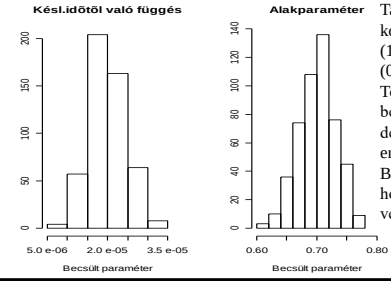
További lehetőségek

- A kárkifizetés ideje már egyáltalán nem jelentkezik tényezőként (azaz elfogadható az infláció kiszűrésére alkalmazott modell)



A becslések bizonytalansága

- Szimulációs vizsgálatok:
  - bootstrap (az eredeti mintából visszatevéses mintákat véve) a 0.005 küszöb-értékre



Tapasztalati 95%-os konfidencia-intervallumok:
$(1.181;2.928)*10^{-5}$
(0.64;0.796)
Tehát az időfüggő paraméter becslése bizonytalanabb, de a nagyságrendje ennek is pontos.
Bizonyosnak tekinthető tehát hogy a károsszeg nem véges szórású.

Konfidencia intervallumok más esetekre

- Ha nem lenne szerepe a késlekedési időnek, kisebb lenne a szórása a paraméterbecsléseknek, például: (0.724; 0.750) lenne a 95%-os konfidencia intervallum az alakparaméterre.
- A modellt feltételezve, GPD-eloszlásból is generáltunk mintákat. Az alakparaméter ingadozása itt is hasonló volt az általunk kapott értékekhez: (0.637; 0.76) a 95%-os konfidencia intervallum, tehát a modell alkalmazása ebből a szempontból is reális.

További kérdések

- A biztosító számára például az évi össz-kárkifizetés lényegesebb mennyiség.
- Szimuláció: a
  - nagy károkat a becsült paraméteres modellel közelítve,
  - a késlekedési időt a tapasztalati eloszlásával.
- Eredmények (a megfigyelt kifizetés %-ában):
  - az esetek 0.5 %-ában > 150%
  - az esetek 0.2%-ában > 200%
- Pontosabb szimulációhoz/vizsgálathoz a kisebb károkkal is kell foglalkozni.
- Itt más eloszlás jön szóba.