Programtervező informatikus BSc, C szakirány
Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

1. (8-9 hét) Konfidenciaintervallumok, paraméteres próbák

Elmélet

Definíció (Konfidenciaintervallum a normális eloszlás várható értékére). Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ független azonos eloszlású valószínűségi változók (tfh. σ ismert). Ekkor az $(1-\alpha)100\%$-os konfidenciaintervallum m-re: $\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ahol $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a standard normális $1-\frac{\alpha}{2}$-kvantilisét jelöli.

Hipotézisvizsgálat

Hipotézis: állítás, aminek igazságát vizsgálni szeretnénk
Statisztikai próba: eljárás aminek a segítségével döntést hozhatunk a hipotézisről

Legyen $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ független, azonos eloszású minta. Jelölje $\mathcal{X}$ a mintateret, azaz a minta lehetséges értékeinek halmazát.

Nullhipotézis: $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$
Ellenhipotézis: $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$

Paramétertér: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$
Döntés: $T(\mathbf{X})$ statisztika ($T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ próbastatisztika) segítségével, melynek ismerjük az eloszlását a nullhipotézis fennállása esetén

Mintateret két részre bontjuk: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_e \cup \mathcal{X}_k$ és $\mathcal{X}_e \cap \mathcal{X}_k = \emptyset$
$\mathcal{X}_k$: kritikus tartomány – azon $\mathbf{X}$ megfigyelések halmaza, amikre elutasítjuk a nullhipotézist
$\mathcal{X}_e$: elfogadási tartomány – azon $\mathbf{X}$ megfigyelések halmaza, amikre elfogadjuk a nullhipotézist
Kritikus érték: c (függ α-tól, ld. alább)
$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : T(\mathbf{x}) \geq c\}$ vagy $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : T(\mathbf{x}) \leq c\}$ vagy $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : |T(\mathbf{x})| \geq c\}$
$\mathcal{X}_e = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : T(\mathbf{x}) < c\}$ $\quad \mathcal{X}_e = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : T(\mathbf{x}) > c\}$ $\quad \mathcal{X}_e = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : |T(\mathbf{x})| < c\}$

	Döntés	
Valós állapot	H_0-t elfogadjuk ($\mathcal{X}_e$)	H_0-t elvetjük ($\mathcal{X}_k$)
H_0 igaz ($\vartheta \in \Theta_0$)	helyes döntés ($1-\alpha$)	elsőfajú hiba (α)
H_0 hamis ($\vartheta \in \Theta_1$)	másodfajú hiba (β)	helyes döntés ($1-\beta$)

Elsőfajú hiba valószínűsége:
Egyszerű hipotézis (Θ_0 halmaz egyelemű) esetén: $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) = \alpha \quad \vartheta_0 \in \Theta_0$ / $= \mathbb{P}$(elvetjük H_0-t | H_0 igaz) /
Összetett hipotézis (Θ_0 halmaz több elemű) esetén: $\mathbb{P}_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$

Próba (pontos) terjedelme vagy **szignifikanciaszintje**: $\alpha = \sup\{\mathbb{P}_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) : \vartheta \in \Theta_0\}$
Megbízhatósági (konfidencia-) szint: $1 - \alpha$ / $= \mathbb{P}$(elfogadjuk H_0-t | H_0 igaz) /

A próba meghatározása: előre rögzített α terjedelemhez azt a c értéket keressük, amire a próba pontos terjedelme éppen α.

Másodfajú hiba valószínűsége:
$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_e) = 1 - \mathbb{P}_{\vartheta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_k) \quad \vartheta \in \Theta_1$ / $= \mathbb{P}_{\vartheta}$(elfogadjuk H_0-t | H_0 hamis) /

Erőfüggvény: $\psi(\vartheta) = 1 - \beta(\vartheta)$ / $= \mathbb{P}$(elvetjük H_0-t | H_0 hamis) /
Minél erősebb a próba, annál nagyobb valószínűséggel veti el a hamis nullhipotézist. Vagyis a próba ereje annak a valószínűsége, hogy egy adott eltérést adott mintanagyság és terjedelem mellett egy statisztikai próba kimutat. (Kísérletek tervezésekor az erő nagyságának előre meghatározott értékéből határozható meg a szükséges mintanelemszám.) A próba erejét addig nem tudjuk kiszámolni, ameddig az ellenhipotézis egy értékét nem rögzítjük ill. nem mondjuk meg a különbég nagyságát, amit ki szeretnénk mutatni.

p-érték: annak a valószínűsége, hogy igaz H_0 esetén a próbastatisztikára a tapasztalt vagy annál nagyobb eltérést kapunk. Ha egy próbát számítógép segítségével végzünk el, rendszerint a p-érték révén tudunk dönteni: ha p-érték$< \alpha$, akkor elvetjük H_0-t.

A hipotézisek nem egyenrangúak. H_0-t csak indokolt esetben szeretnénk elutasítani, így az elsőfajú hiba súlyosabbnak számít, mint a másodfajú hiba (különösen, ha csak kicsi az eltérés a H_0-hoz képest). Általában az elsőfajú hiba legnagyobb valószínűségét adjuk meg, de a másodfajú hiba csökkentésére is törekszünk (pl. mintanagyság növelésével).
H_0 elfogadása: statisztikailag nem találtunk komoly bizonyítékot arra, hogy H_0 nem lenne igaz; vagyis H_0 elfogadása esetén sem lehet állítani, hogy H_0 teljesül
H_0 elvetése: statisztikailag komoly bizonyítékot találtunk arra, hogy a H_0 nem igaz, azaz H_1 igaz

Próbák normális eloszlás várható értékére
Egymintás próbák
$X_1, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$

$H_0 : m = m_0$ $\quad$ $H_0 : m \le m_0$ $\quad$ $H_0 : m \ge m_0$
$H_1 : m \ne m_0$ $\quad$ $H_1 : m > m_0$ $\quad$ $H_1 : m < m_0$

Egymintás u-próba (σ ismert)

Próbastatisztika: $$T(\mathbf{X}) = u = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$$

Kritikus tartományok:
$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : u > u_{1-\alpha}\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : u < u_{\alpha}\}$

Kapcsolat a konfidenciaintervallummal (az alábbi lépések ekvivalensek):

$$\boxed{|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \Leftrightarrow u > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ vagy } u < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ vagy } \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{X} - m_0 > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ vagy } \overline{X} - m_0 < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \boxed{m_0 \notin \left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Vagyis a null hipotézist pontosan akkor utasítjuk el, ha a $(1-\alpha)100\%$-os konfidenciaintervallum nem tartalmazza m_0-t.
Egymintás t-próba (σ ismeretlen)

Próbastatisztika: $$T(\mathbf{X}) = t = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \mathrm{t}_{n-1}$$

Kritikus tartományok:
$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |t| > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : t > t_{n-1,1-\alpha}\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : t < t_{n-1,\alpha}\}$

Kétmintás próbák
$X_1, \dots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2), \quad Y_1, \dots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ függetlenek

$H_0 : m_1 = m_2$ $\quad$ $H_0 : m_1 \le m_2$ $\quad$ $H_0 : m_1 \ge m_2$
$H_1 : m_1 \ne m_2$ $\quad$ $H_1 : m_1 > m_2$ $\quad$ $H_1 : m_1 < m_2$

	a két minta független		a két minta páronként összetartozó, nem független
σ_1 és σ_2 ismert	Kétmintás u-próba		Egymintás u-próba a különbségekre
σ_1 és σ_2 ismeretlen	előzetes F-próba		Egymintás t-próba a különbségekre
	$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \ne \sigma_2$	
	Kétmintás t-próba	Welch-próba	

előzetes F-próba (σ_1, σ_2 ismeretlen)
$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1 : \sigma_1 \ne \sigma_2$
Próbastatisztika:
$$F = \begin{cases} \frac{(s_1^*)^2}{(s_2^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{n-1,m-1} & \text{ha } s_1^* > s_2^* \\ \frac{(s_2^*)^2}{(s_1^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{m-1,n-1} & \text{ha } s_2^* > s_1^* \end{cases}$$

Kétmintás u-próba (σ_1, σ_2 ismert)

Próbastatisztika: $$u = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$$

Kétmintás t-próba ($\sigma_1 = \sigma_2$ ismeretlen)

Próbastatisztika: $$t = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)(s_1^*)^2 + (m-1)(s_2^*)^2}{n+m-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n+m-2}$$

Welch-próba ($\sigma_1 \ne \sigma_2$ ismeretlen)

Próbastatisztika: $$t' = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(s_1^*)^2}{n} + \frac{(s_2^*)^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_f \text{, ahol } f \approx \frac{\left(\frac{(S_1^*)^2}{n} + \frac{(S_2^*)^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(S_1^*)^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{(S_2^*)^2}{m}\right)^2}{m-1}}$$

Feladatok

1.1. Feladat. Legyen X_1, X_2, X_3, X_4 független azonos $N(\mu, 2^2)$ eloszlású minta. A megfigyelt értékek a következők: $14{,}8; 12{,}2; 16{,}8; 11{,}1$

a) Adjon 95%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot μ-re!

b) Hány elemű mintára van szükség, ha azt szeretnénk, hogy a konfidenciaintervallum legfeljebb $1{,}6$ hosszúságú legyen?

$(u_{0{,}975} = 1{,}96)$

Megoldás

a) Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14{,}8+12{,}2+16{,}8+11{,}1}{4} = 13,725$

$\sigma = 2$

$\alpha = 0{,}05$

Ekkor $u_{0{,}975} = 1{,}96$, így az $(1-\alpha)100\%$ megbízhatóságú konfidenciaintervallum μ-re:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(13{,}725 - u_{0{,}975} \frac{2}{\sqrt{4}}, 13{,}725 + u_{0{,}975} \frac{2}{\sqrt{4}}\right) = (11{,}765; 15{,}685)$$

R-kód:
```
minta<-c(14.8, 12.2, 16.8, 11.1)
n<-length(minta)
sigma<-2
alpha<-0.05

mean(minta)-qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n)
mean(minta)+qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n)
```

b) A konfidenciaintervallum hossza: $2u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2u_{0{,}975} \frac{2}{\sqrt{n}} < 1{,}6$, így $n > \left(\frac{4u_{0{,}975}}{1{,}6}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 1,96}{1{,}6}\right)^2 \approx 24{,}01$

tehát legalább 25 elemű mintára van szükség.

R-kód (folytatás):
```
hossz<-1.6
(2*qnorm(1-alpha/2)*sigma/hossz)^2
```

1.2. Feladat. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt van-e? Az elmúlt 4 év napi középhőmérsékletei a következők voltak: $14,8; 12,2; 16,8; 11,1$ $°C$, valamint tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.

a) Írjuk fel a null- és ellenhipotézist!

b) Tegyük fel, hogy a napi középhőmérséklet szórása $\sigma = 2$. Tesztelje a fenti hipotézist $\alpha = 0.05$ terjedelem mellett! Adja meg a kritikus tartományt és p-értéket! Mi a döntés?

c) Teszteljük a hipotézist úgy is, hogy nem használjuk a szórásra vonatkozó előzetes információt!

d) Milyen hipotézist írjunk fel, ha azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C-tól különböző-e? Teszteljük a fenti adatok segítségével!

$(u_{0{,}05} = -1{,}645,\ \Phi(1{,}275) = 0{,}899,\ t_{3;0{,}05} = -2{,}353\ u_{0{,}975} = 1,96)$

Megoldás

a) Legyen m a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten. Ekkor

$H_0 : m \geq 15$

$H_1 : m < 15$

b) Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14{,}8+12{,}2+16{,}8+11{,}1}{4} = 13,725$

$\sigma = 2$

$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, egyoldali u-próbát.

Próbastatisztika: $U = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1)$, melynek értéke: $u = \dfrac{13,725 - 15}{\frac{2}{\sqrt{4}}} = -1,275$

U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(U < u_\alpha) = \Phi(u_\alpha) = \alpha$, azaz $\Phi(u_{0,05}) = 0,05$ tehát $u_{0,05} = -1,645$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : U < u_\alpha\} = \{\mathbf{x} \in \chi : U < -1,645\}$.

Mivel most $u = -1,275 > -1,645$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt lenne.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= \Phi(-1,275) = 1 - \Phi(1,275) = 1 - 0,899 = 0,101 > \alpha = 0,05$, így nem vetjük el H_0-t.

c) Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14,8+12,2+16,8+11,1}{4} = 13,725$

$s_n^* = \sqrt{\frac{(14,8-13,725)^2+(12,2-13,725)^2+(16,8-13,725)^2+(11,1-13,725)^2}{3}} = \sqrt{6,6092} = 2,57$

$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, egyoldali t-próbát.

Próbastatisztika: $T = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} t_{n-1}$, melynek értéke: $t = \dfrac{13,725 - 15}{\frac{2,57}{\sqrt{4}}} = -0,99$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(T < t_{n-1;\alpha}) = \alpha$, azaz $P(T < t_{3;0,05}) = 0,05$ tehát $t_{3;0,05} = -2,353$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : T < t_{n-1;\alpha}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : T < -2,353\}$.

Mivel most $t = -0,99 > -2,353$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt lenne.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= P(t_3 < -0,99) = 0.198 > \alpha = 0,05$, így nem vetjük el H_0-t.

d) Legyen m a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten. Ekkor

$H_0 : m = 15$

$H_1 : m \neq 15$

Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14,8+12,2+16,8+11,1}{4} = 13,725$

$\sigma = 2$

$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, kétoldali u-próbát.

Próbastatisztika: $U = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1)$, melynek értéke: $u = \dfrac{13,725 - 15}{\frac{2}{\sqrt{4}}} = -1,275$

U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, azaz $P(U < u_{0,975}) = 0,975$ tehát $u_{0,975} = 1,96$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > 1,96\}$.

Mivel most $|u| = 1,275 < 1,96$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C-tól különböző lenne.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= 2 \cdot (1 - \Phi(1,275)) = 0.202 > \alpha = 0,05$, így nem utasítjuk el H_0-t.

A hipotézist a várható értékre vonatkozó 95%-os konfidenciaintervallum segítségével is tesztelhetjük:

A konfidenciaintervallum $(11,765; 15,685)$ (Feladat 1.) tartalmazza a 15-öt, így nem utasítjuk el H_0-t.

1.3. Feladat. Az alábbi két minta két különböző gyáregységben tapasztalt selejtarányra vonatkozik (ezrelékben). Állítható-e, hogy az „A” gyáregység jobban dolgozott? (Feltételezhetjük, hogy a minták normális eloszlásúak, függetlenek.)

A	11,9	12,1	12,8	12,2	12,5	11,9	12,5	11,8	12,4	12,9
B	12,1	12,0	12,9	12,2	12,7	12,6	12,6	12,8	12,0	13,1

$(F_{9,9;0,975} = 4{,}026,\ t_{18;0,05} = -1{,}734)$

Megoldás

Jelölje m_A az „A” és m_B az „B” gyáregység selejtarányát. Ekkor

$H_0 : m_A \geq m_B$

$H_1 : m_A < m_B$

Adatok: $n_A = 10$, $n_B = 10$

$\overline{x}_A = \frac{11,9+\cdots+12,9}{10} = 12,3$

$\overline{x}_B = \frac{12,1+\cdots+13,1}{10} = 12,5$

$s_A^{*2} = \frac{(11,9-12,3)^2+\cdots+(12,9-12,3)^2}{9} = \frac{132}{900} = 0,147$

$s_B^{*2} = \frac{(11,9-12,5)^2+\cdots+(12,9-12,5)^2}{9} = \frac{142}{900} = 0,158$

$\alpha = 0,05$

Van különbség a szórások közt? Előzetes F-próbával tesztelünk.

$H_0 \colon \sigma_A^2 = \sigma_B^2$
$H_1 \colon \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

$F = \frac{s_B^{*2}}{s_A^{*2}} = \frac{142}{132} = 1,076 <$ kritikus érték $= F_{9,9;0,975} = 4,026$, tehát nem utasítjuk el H_0-t, így nincs rá okunk, hogy a két szórást különbözőnek tekintsük.

Milyen próbát használjunk? Kétmintás, egyoldali t-próbát.

$T = \sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A+n_B}} \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{\frac{(n_A-1)s_A^{*2}+(n_B-1)s_B^{*2}}{n_A+n_B-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n+m-2}$, melynek értéke: $t = \sqrt{\frac{10 \cdot 10}{10+10}} \frac{12,3-12,5}{\sqrt{\frac{9 \cdot 0,147+9 \cdot 0,158}{10+10-2}}} = -1,13$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(T < t_{n_A+n_B-2;\alpha}) = \alpha$, azaz $P(T < t_{18;0,05}) = 0,05$ tehát $t_{18;0,05} = -1,734$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : T < t_{n_A+n_B-2;\alpha}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : T < -1,734\}$.
Mivel most $t = -1,13 > -1,734$, nem utasítjuk el H_0-t, azaz nincs elég bizonyítékunk arra, hogy az „A” gyáregység jobban dolgozott.

1.4. Feladat. Két szervert hasonlítottunk össze. Az elsőn 30 futás átlagos ideje 6,7 mp volt, míg ettől függetlenül a másodikon 20 futásé 7,2 mp. Vizsgáljuk meg, hogy van-e szignifikáns különbség a két szerver sebessége közt, ha a futási idők szórása mindkét gépen 0,5 volt?
($u_{0,975} = 1{,}96$)

Megoldás

Jelölje m_1 és m_2 az első illetve a második szerveren való futás idejét. Ekkor

$H_0 \colon m_1 = m_2$
$H_1 \colon m_1 \neq m_2$

Adatok: $n_1 = 30$, $n_2 = 20$
$\overline{x}_1 = 6.7$
$\overline{x}_2 = 7.2$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$

Milyen próbát használjunk? Kétmintás, kétoldali u-próbát (szórások ismertek).

$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1)$, melynek értéke: $u = \frac{6.7-7.2}{\sqrt{\frac{0.5^2}{30} + \frac{0.5^2}{20}}} = -3.464$

U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, azaz $P(U < u_{0,975}) = 0,975$ tehát $u_{0,975} = 1,96$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > 1,96\}$.
Mivel most $|u| = 3,464 > 1,96$, elutasítjuk H_0-t, azaz a két szerver futási ideje közt szignifikáns különbség van.

1.5. Feladat. Az alábbi két minta 10 forgalmas csomópont levegőjében található szennyezőanyag koncentrációra vonatkozó két adatsort tartalmaz. Az első sorban a november 15-i, a másodikban a november 29-i számok szerepelnek. Szignifikánsan változott-e a légszennyezettség?

november 15.	20,9	17,1	15,8	18,8	20,1	15,6	14,8	24,1	18,9	12,5
november 29.	21,4	16,7	16,4	19,2	19,9	16,6	15,0	24,0	19,2	13,2

($t_{9;0,975} = 2{,}262$)

Megoldás

Jelölje m_1 és m_2 a november 15-i illetve a november 29-i légszennyeződés várható értékét. Ekkor

$H_0 \colon m_1 = m_2$
$H_1 \colon m_1 \neq m_2$

Mivel ugyanazokon a helyeken mérték a légszennyezettséget, a minták páronként összetartozóak (egymástól nem független megfigyeléseink vannak). A légszennyeződés változására vonatkozó információ a két mérési eredmény különbségében rejlik.

november 29. - november 15.	0,5	-0,4	0,6	0,4	-0,2	1,0	0,2	-0,1	0,3	0,7

Jelöljük m-mel a november 29-én és a november 15-én mért légszennyeződés várható értékének különbségét, azaz $m = m_2 - m_1$. Ekkor a fenti hipotézis a következőképpen fogalmazható meg:

$H_0 \colon m = 0$
$H_1 \colon m \neq 0$

Adatok: $n = 10$

$\overline{x} = \frac{0{,}5+\cdots+0{,}7}{10} = 0{,}3$

$s_n^* = \sqrt{\frac{(0{,}5-0{,}3)^2+\cdots+(0{,}07-0{,}3)^2}{10-1}} = 0{,}435$

$\alpha = 0{,}05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, kétoldali t-próbát.

$$T = \frac{\overline{X} - 0}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n-1}, \text{ melynek értéke: } t = \frac{0{,}3 - 0}{\frac{0{,}435}{\sqrt{10}}} = 2{,}18$$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, azaz $P(T < t_{9;0{,}975}) = 0,975$ tehát $t_{9;0{,}975} = 2{,}262$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |T| > 2{,}262\}$.

Mivel most $t = 2{,}18 < 2{,}262$, nem utasítjuk el H_0-t, azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy különbség lenne a november 15-i és 29-i légszennyeződés mértéke közt.

Viszont vegyük észre, hogy a próbastatisztika értéke közel van a kritikus értékhez. Ezt a p-érték α-hoz közeli értékéből is látjuk: p-érték $= P(|t_9| > 2{,}18) = 0{,}057$. Ez utóbbi azt mutatja, hogy az $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszinten nem utasítjuk el a nullhipotézist, viszont egy $0{,}057$-nél magasabb szinten már igen.