Programtervező informatikus BSc, C szakirány
Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

1. (3-4 hét) Várható érték, szórás, abszolút folytonos eloszlások, függetlenség, aszimptotikus tulajdonságok

Elmélet

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó várható értéke)**.** Jelölése: EX.
Legyen X diszkrét valószínűségi változó, amely az x_1,x_2,... értékeket veszi fel, p_1,p_2,... valószínűségekkel, ekkor

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$ ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, melyre $p_i = P(X = x_i)$, ekkor $EX^2 = \sum_{x_i} {x_i}^2 p_i$.

Állítás Ha EX és EY véges, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor
$E(aX + b) = aEX + b$ és
$E(X + Y) = EX + EY$.

Definíció (X szórásnégyzete)**.** $D^2X = E[(X - EX)]^2 = EX^2 - E^2X$

Definíció (X szórása)**.** $DX = \sqrt{D^2X}$

Nevezetes diszkrét eloszlások:

Név (paraméterek)	Értékek (k)	$P(X = k)$	EX	D^2X
Indikátor (p) (= Binomiális (1, p))	$0, 1$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Binomiális (n, p)	$0, 1, ..., n$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson (λ)	$0, 1, ...$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Geometriai vagy Pascal (p) (= Negatív binomiális (1, p))	$1, 2, ...$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negatív binomiális (n, p)	$n, n+1, ...$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Hipergeometriai (N, M, n)	$0, 1, ..., n$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$

Abszolút folytonos eloszlások:

Definíció (Abszolút folytonos valószínűségi változó)**.** Ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Ilyenkor $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk. (Megjegyzés: Az f sűrűségfüggvény létezéséhez szükséges (de nem elégséges), hogy F folytonos legyen (azaz $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re).)

Tétel. *Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor $f(x) = F'(x)$; $f(x) \geq 0$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0$ $\forall x$-re;*
$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Definíció (Várható érték)**.** Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, ekkor

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx,$$ ha az integrál létezik.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Név (paraméterek)	Értékek	Eloszlásfüggvény (F)	Sűrűségfüggvény (f)	EX	D^2X
Standard normális $N(0,1)$	$(-\infty,\infty)$	$\Phi(x) =$ táblázatban	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\in\mathbb{R}$	0	1
Normális N(m,σ^2)	$(-\infty,\infty)$	visszavezethető $\Phi(x)$-re	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x\in\mathbb{R}$	m	σ^2
Egyenletes E$[a,b]$	$[a,b]$	$\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 1 & \text{ha } b<x\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális Exp(λ)	$(0,\infty)$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma $\Gamma(\alpha,\lambda)$	$(0,\infty)$	nincs zárt elemi képlet	$\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Normális eloszlás standardizálása: Legyen $X\sim N(m,\sigma^2)$, ekkor $\frac{X-m}{\sigma}\sim N(0,1)$.

Függetlenség:

Definíció (Valószínűségi változók függetlesége). Az $X_1, X_2, \dots X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha bármely $I_1, I_2, \dots, I_n$ intervallumra $P(X_1\in I_1,\dots,X_n\in I_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i\in I_i)$
Megjegyzés: Független valószínűségi változók függvényei is függetlenek lesznek.

Tétel (Valószínűségi változók függetlensége). *(i) Az $X_1, X_2, \dots X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük megegyezik eloszlásfüggvényeik szorzatával, azaz $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ $\forall x$-re.*
(ii) Az $X_1, X_2, \dots X_n$ diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha
$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$ $\forall x_i$*-re.*
(iii) Az $X_1, X_2, \dots X_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek ha
$f(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ $\forall x_i$*-re.*

Definíció (X és Y kovarianciája). $cov(X,Y)=E(XY)-EXEY$

Definíció (X és Y korrelációja). $R(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{DXDY}$

Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow cov(X,Y)=0$, de fordítva nem igaz.
$D^2(aX+b)=a^2D^2X, \quad D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2cov(X,Y)$

Egyenlőtlenségek:

Tétel (Markov-egyenlőtlenség). *Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton növő pozitív függvény, $X\ge 0$ valószínűségi változó, melyre $EX<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{E\left(g(X)\right)}{g(\varepsilon)}$$

Spec., ha $g(x)=x$, akkor

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{EX}{\varepsilon}$$

Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Legyen X tetszőleges valószínűségi változó, melyre $D^2X<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{D^2X}{\varepsilon^2}$$

Aszimptotikus tulajdonságok:

Tétel (Nagy számok törvénye (NSZT)). *Legyenek $X_1, X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \qquad \text{1 valószínűséggel.}$$

Tétel (Centrális határeloszlás tétel (CHT)). *Legyenek $X_1, X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m$, $D^2X_1=\sigma^2<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1) \qquad \text{gyengén,}$$

azaz

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<x\right)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\Phi(x)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Feladatok

1.1. Feladat. Tegyük fel, hogy a 3 valószínűségszámítás gyakorlatra rendre 15, 20, illetve 25 diák jár. Várhatóan mekkora egy véletlenszerűen kiválasztott diák csoportja?

Megoldás

Legyen X a valószínűségszámítás gyakorlatra járó diákok száma. Ekkor
$P(X=15)=15/60=1/4$
$P(X=20)=20/60=1/3$
$P(X=25)=25/60=5/12$
Így a várható érték $EX=15\cdot 1/4+20\cdot 1/3+25\cdot 5/12=(45+80+125)/12=250/12=20,83.$

1.2. Feladat. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

Megoldás

Legyen X a sikeres dobások száma az n dobásból. Ekkor X egy p paraméterű binomiális eloszlást követ, melyre $p=\frac{11}{36}$ a sikeres dobás valószínűsége (hiszen P(nincs hatos)=$\frac{25}{36}$). Így X várható értéke $EX=np$, azaz várhatóan $\frac{11}{36}n$ sikeres dobásunk lesz.

1.3. Feladat. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettőn 1-es, kettőn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerűen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

Megoldás

Legyen X_i annak az indikátora, hogy mindkét i feliratú lap bent marad az m lap kivétele után, azaz

$$X_i=\begin{cases}1, & \textit{ha mindkét } i \textit{ feliratú lap bent marad}\\ 0, & \textit{különben.}\end{cases}$$

Ekkor

$$p=P(X_i=1)=\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}.\qquad \left(\textit{Legyen}\binom{n}{k}:=0,\ \textit{ha } n<k.\right)$$

Legyen X a dobozban maradt párok száma az m lap kivétele után. Ekkor $X=X_1+X_2+\cdots+X_N$, melynek várható értéke

$$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_N=Np=N\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=\frac{(2N-m)(2N-1-m)}{2(2N-1)}.$$

1.4. Feladat. Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?
b) páros számok számának várható értéke?

Megoldás

a) Egy húzásnál a várható érték $1\cdot\frac{1}{90}+2\cdot\frac{1}{90}+\cdots+90\cdot\frac{1}{90}=\frac{1+2+\ldots+90}{90}=45,5.$ Öt szám kihúzása esetén pedig az összeg várható értéke $5\cdot 45,5=227,5.$

b) A lottón kihúzott (páros és páratlan) számok számának várható értéke 5, azaz $E(\textit{párosak száma})+E(\textit{páratlanok száma})=5$. Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám közül választhatunk, így $E(\textit{párosak száma})=E(\textit{páratlanok száma})$. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a $E(\textit{párosak száma})=2,5$.

Más megoldás: Jelölje X a kihúzott páros számok darabszámát. Ekkor X hipergeometrikus eloszlást követ $N=90$, $K=45$ és $m=5$ paraméterekkel, így $EX=m\dfrac{K}{N}=5\dfrac{45}{90}=2.5$.

1.5. Feladat. Egy adott területről származó talajmintákban a spórák száma Poisson-eloszlású. A minták harmadában egyáltalán nincs spóra. Mi a valószínűsége annak, hogy egy mintában a spórák száma egynél több? Mekkora a spórák számának várható értéke és szórása?

Megoldás

Legyen X a spórák száma a vizsgált mintában. Ekkor $X \sim Poisson(\lambda)$.
$P(X=0) = e^{-\lambda} = \frac{1}{3}$, *így* $\lambda = -\ln\dfrac{1}{3} = \ln 3 \approx 1,099$.
$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (1 \cdot e^{-\ln 3} + \ln 3 \cdot e^{-\ln 3}) \approx 0,3$.
$EX = \lambda = \ln 3$ *és* $DX = \sqrt{\ln 3} \approx 1,048$.

1.6. Feladat. Tegyük fel, hogy egy számítógép meghibásodási időpontja 0 és 10 év között van és itt geometriai modellel írható le. Határozzuk meg a jelenség eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Legyen az X valószínűségi változó a meghibásodás időpontja, azaz X a [0,10] intervallumból veheti fel értékeit. Ekkor $P(X<0)=0$, mivel a meghibásodás időpontja nem lehet negatív. Hasonlóan $P(X<10)=1$, mivel feltételezésünk szerint a számítógép 10 éven túl nem üzemelhet hibamentesen. Ha viszont $0<x<10$, akkor $P(X<x) = \frac{x}{10}$, mivel a meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával.

Ekkor az eloszlásfüggvény a következő alakú: $F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & ha\ \ x \leq 0 \\ \frac{x}{10} & ha\ \ 0 < x \leq 10 \\ 1 & ha\ \ 10 < x \end{cases}$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük a $[0,10]$ intervallumon.

1.7. Feladat. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?

Megoldás

Mivel $Y < 3$, így $P(Y \geq 3) = 1 - F(3-) = 0$, tehát $F(3-) = 1$, vagyis

$$1 = \max_{x \in (0,3]} cx^3 = c \cdot 3^3 = 27c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{27}.$$

Tudjuk, hogy -1-ben az eloszlásfüggvény 0 értéket vesz fel, emiatt $P(-1 < Y < 1) = F(1) - F(-1) = \dfrac{1}{27} - 0$.

1.8. Feladat. Legyen X egy abszolút folytonos valószínűségi változó a $[0,c]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}x^2, & \text{ha } \ 0 \leq x < c \\ 0, & \text{ha } \ x < 0 \ \text{ vagy } \ x \geq c. \end{cases}$$

Határozza meg c-t és X eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Mivel a sűrűségfüggvény integrálja $= 1$ a $[0,c]$ intervallumon, így $1 = \displaystyle\int_0^c \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^c = \frac{1}{9}\frac{c^3}{3}$, *amiből* $c = 3$.

Felhasználva, hogy az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \left[\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27} \quad 0 < x \leq 3, \text{ így } F(x) = P(X<x) = \begin{cases} 0, & ha\ \ x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{27}, & ha\ \ 0 < x \leq 3 \\ 1, & ha\ \ x > 3 \end{cases}$$

1.9. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét valamint várható értékét!

Megoldás

Legyen Z a középponttól való távolság. Ekkor $0 \leq Z \leq 1$, így itt $F(r) = P(Z < r) = \frac{r^2\pi}{1^2\pi} = r^2$, *így*

$$F(r) = \begin{cases} 0, & ha\ r \leq 0 \\ r^2, & ha\ 0 < r \leq 1 \\ 1, & ha\ 1 < r \end{cases}$$

Ebből deriválással adódik, hogy $f(r) = F'(r) = 2r$ a $[0,1]$-en, így

$$f(r) = \begin{cases} 0, & ha\ r \leq 0 \text{ és } r > 1 \\ 2r, & ha\ 0 < r \leq 1 \end{cases}$$

$$EZ = \int_0^1 r \cdot 2r\, dr = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

1.10. Feladat. Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

a) kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

b) több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

c) 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

d) Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

Megoldás

Legyen X az első meghibásodásig megtett út. Ekkor $X \sim Exp(\lambda)$, ahol $\lambda = \frac{1}{6000}$.

a) $P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}4000} \approx 0,4866$

b) $P(X > 6500) = 1 - P(X < 6500) = e^{-\frac{1}{6000}6500} \approx 0,3385$

c) $P(4000 < X < 6000) = P(X < 6000) - P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}6000} - (1 - e^{-\frac{1}{6000}4000}) \approx 0,1455$

d) $0,2 = P(X < c) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}c}$, *azaz* $0,8 = e^{-\frac{1}{6000}c}$, *amiből* $c = -6000\ln(0,8) \approx 1338,86$.

1.11. Feladat. Egy tehén napi tejhozamát normális eloszású valószínűségi változóval, $m = 22,1$ liter várható értékkel és $\sigma = 1,5$ liter szórással, modellezzük.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 liter közé esik?

b) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m - \sigma$ es $m + \sigma$ közé?

$(\Phi(0,6) = 0,7257, \Phi(1,93) = 0,9732, \Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

Legyen X a napi tejhozam. Ekkor $X \sim N(22,1; 1,5^2)$.

a) $P(23 < X < 25) = P(X < 25) - P(X < 23) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{25-m}{\sigma}\right) - P(X < 23) = P\left(\frac{X-22,1}{1,5} < \frac{25-22,1}{1,5}\right) - P(X < 23) = \Phi\left(\frac{25-22,1}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{23-22,1}{1,5}\right) = \Phi(1,93) - \Phi(0,6) = 0,9732 - 0,7257 = 0,2475.$

b) $P(m - \sigma < X < m + \sigma) = P(X < m + \sigma) - P(X < m - \sigma) = \Phi\left(\frac{(m+\sigma)-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(m-\sigma)-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.$ *Vagyük észre, hogy ez az eredmény sem m-től sem σ-tól sem függ.*

1.12. Feladat. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető.

Megoldás

Legyen X egy termék meghibásodásának ideje. Ekkor $X \sim N(10, 2^2)$

$$0,1 = P(X < c) = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{c-10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-10}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \Phi^{-1}(0,1) + 10 = 2 \cdot (-\Phi^{-1}(0,9)) + 10 = -2 \cdot 1,28 + 10 = 7,44.$$

Tehát akár 7 év garanciát is adhatunk ebben az esetben.
Standard normális eloszás eloszlásfüggvényének értékei: `https://zempleni.elte.hu/stdnormelo.pdf`

1.13. Feladat. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon Számítsuk ki $(X-1)^2$ várható értékét!

Megoldás

Ha $X \sim Egyenletes[1,4]$, *akkor* $Y = X - 1 \sim Egyenletes[0,3]$. *Ekkor*

$$E(X-1)^2 = EY^2 = \int\limits_0^3 y^2 \frac{1}{3}\, dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 3$$

Más megoldás:

$$E(X-1)^2 = D^2(X-1) + E^2(X-1) = \frac{(3-0)^2}{12} + \left(\frac{0+3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$

1.14. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók mindkettő 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen $W = X - Y$. Számítsa ki W várható értékét és szórását!

Megoldás

$EW = EX - EY = 0$ *és* $DW = \sqrt{D^2X + D^2Y} = \sqrt{2}$

1.15. Feladat. Adjon meg véges sok értéket felvehető (X) ill. végtelen sok értéket felvehető (Y) diszkrét valószínűségi változókat melyeknek szórása 1!

Megoldás

Például: Legyen $P(X = -1) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{1}{2}$ *ill.* $Y \sim Poisson(1)$.

1.16. Feladat. Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki
a) EW-t és D^2W-t, ill.
b) $P(W \leq 6)$-ot!
$(\Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

a) $EW = 3EX - 2EY + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$ *és*
$D^2W = D^2(3X - 2Y) = D^2(3X) + D^2(-2Y) = 3^2D^2X + (-2)^2D^2Y = 9D^2X + 4D^2Y = 45 + 36 = 81$
b) Mivel független normális eloszlású valószínűségű változók összege is normális eloszlású, és $3X \sim N(6,\ 3^2 \cdot \sqrt{5}^2)$ *továbbá* $-2Y \sim N(-10,\ (-2)^2 \cdot 3^2)$, *így* $W \sim N(-3, 9^2)$.

$$P(W \leq 6) = P\left(\frac{W - (-3)}{9} < \frac{6 - (-3)}{9}\right) = \Phi(1) = 0,8413$$

1.17. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók, melyre $D^2X < \infty$ és $D^2Y < \infty$.
a) Mutassa meg, hogy $X + Y$ és X kovarianciája egyenlő X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $X + Y$ és X korrelációját!

Megoldás

a)

$$cov(X+Y, X) = E(X+Y)X - E(X+Y)EX = EX^2 + E(YX) - E^2X - EYEX =$$
$$= EX^2 - E^2X + E(YX) - EYEX = cov(X,X) + cov(Y,X) = D^2(X)$$

b)

$$corr(X+Y, X) = \frac{cov(X+Y,X)}{D(X+Y)DX} = \frac{D^2X}{\sqrt{D^2X + D^2Y}DX} = \frac{DX}{\sqrt{D^2X + D^2Y}}$$

1.18. Feladat. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független? $(\Phi(1{,}28) = 0{,}8997)$

Megoldás

Legyen X *egy tábla csokoládé tömege,* $X \sim N(100, 3^2)$. *Ekkor* n *tábla csokoládé átlagos tömege* $\overline{X} \sim N(100, \frac{9}{n})$, *mivel* $D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{n \cdot 9}{n^2} = \frac{9}{n}$.

$$0{,}9 = P(\overline{X} > 99{,}5) = 1 - P(\overline{X} < 99{,}5) = 1 - P\left(\frac{\overline{X} - 100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} < \frac{-0{,}5 \cdot \sqrt{n}}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1{,}28) = 0{,}8997 \approx 0{,}9$, *így* $1{,}28 = \frac{\sqrt{n}}{6}$. *Ebből következik, hogy* $n = (6 \cdot 1{,}28)^2 = 58{,}9$, *azaz legalább* 59 *csokit kell egy dobozba csomagolni.*

1.19. Feladat. Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?
$(\Phi(1{,}12) = 0{,}8686)$

Megoldás

Jelölje X egy kép eloszlását $\mu = 600$KB várható értékkel és $\sigma = 100$KB szórással. Legyen S_n n db ilyen valószínűségi változó összege ($n = 80$). A centrális határeloszlás tétel szerint

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to Z \text{ ha } n \to \infty, \text{ ahol } Z \sim N(0,1).$$

Tehát

$$P(47000 \le S_n \le 48000) = P\left(\frac{47000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100} \le \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{48000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100}\right) \approx$$

$$\approx P(-1,12 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,12) = 0,5 - (1 - \Phi(1,12)) = 0,5 - (1 - 0,8686) = 0,3686 = 36,9\%$$

1.20. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású ideig töltődnek.
a) Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
$(\Phi(2,42) = 0,992, \Phi(1,645) = 0,95)$

Megoldás

Legyen X egy fájl telepítési ideje $\mu = 10$ mp várható értékkel és $\sigma = 2$ mp szórással. Jelölje S_n n db fájl telepítési idejének az összegét ($n = 68$).
a) Használva a Centrális Határeloszlás Tételt,

$$P(\textit{teljes frissítés lezajlik 12 percen belül}) = P(S_n < 720) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{720 - 680}{2\sqrt{68}}\right) \approx \Phi(2,42) = 99,2\%$$

b)

$$0,95 = P(S_n < 600) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1,645) = 0,95$, így $1,645 = \dfrac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}$, vagyis

$$\begin{aligned} 3{,}29\sqrt{n} &= 600 - 10n \ \ / \ y := \sqrt{n} \\ 3{,}29y &= 600 - 10y^2 \\ 10y^2 + 3{,}29y - 600 &= 0 \\ &\to y_1 = 7{,}58, y_2 = -7{,}91 \\ y = \sqrt{n} \ge 0 &\Rightarrow \sqrt{n} = 7{,}58 \end{aligned}$$

Így következik, hogy $n = 57{,}51$, azaz legfeljebb 57 fájlból állhat a frissítés.

1.21. Feladat. Legyen egy X pozitív valószínűségi változó várható értéke $EX = 3$ és szórása $DX = 3$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 13-at vagy annál nagyobb értéket! Mennyi a valószínűség pontos értéke, ha feltesszük, hogy az eloszlás exponenciális?

Megoldás

Markov-egyenlőtlenséggel: $P(X \ge 13) \le \dfrac{EX}{13} = \dfrac{3}{13} \approx 0{,}23$
A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 10$ értékre használva

$$P(X \ge 13) = P(X - 3 \ge 13 - 3) = P(X - 3 \ge 10) \le P(|X - 3| \ge 10) \le \frac{D^2X}{10^2} = \frac{9}{100} = 0,09$$

Ha X exponenciális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$, így

$$P(X \ge 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - (1 - e^{-\frac{13}{3}}) = e^{-\frac{13}{3}} = 0,013$$

1.22. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől?

Megoldás

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 1$ értékre használva

$$P(|X - 40| \geq 1) \leq \frac{D^2 X}{1^2} = \frac{0,2^2}{1^2} = 0,04$$

Vagyis legfeljebb 0,04 annak a valószínűsége, hogy a vezeték rövidebb, mint 39 *m ill. hosszabb, mint* 41 *m.*