# Programtervező informatikus BSc, C szakirány
# Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

## 1. (1-2 hét) Valószínűségek kiszámítása (ismétlés: kombinatorika); feltételes valószínűség és Bayes-tétel, diszkrét valószínűségi változók

### Elmélet

**Definíció** (Ismétlés nélküli permutáció)**.** $n$ (különböző) elem egy sorrendje. A lehetőségek száma:

$$n!.$$

**Definíció** (Ismétléses permutáció)**.** $n$ (nem feltétlen különböző) elem egy sorrendje, ahol az egyforma elemeket nem különböztetjük meg (tfh. az $n$ elem közül $k_1, \dots, k_r$ darab megegyezik). A lehetőségek száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r}.$$

**Definíció** (Ismétlés nélküli kombináció)**.** $n$ (különböző) elem közül $k$ számú $(k \leq n)$ elem egyszerre történő kiválasztása (sorrend nem számít, nincs visszatevés). A lehetőségek száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

**Definíció** (Ismétléses kombináció)**.** $n$ (különböző) elemből visszatevéses eljárással $k$ számú $(k \leq n)$ elem kiválasztása (sorrend nem számít). A lehetőségek száma:

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

**Definíció** (Ismétlés nélküli variáció)**.** $n$ (különböző) elem közül kiválasztott valamely $k$ számú $(k \leq n)$ elem egy sorrendje (nincs visszatevés). A lehetőségek száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Definíció** (Ismétléses variáció)**.** $n$ (különböző) elem közül visszatevéses eljárással kiválasztott valamely $k$ számú $(k \leq n)$ elem egy sorrendje. A lehetőségek száma:

$$n^k.$$

A valószínűség a matematikai fogalma annak, hogy mekkora esély van valamire, például egy ászt kihúzni egy kártyapakliból, vagy egy piros golyót kihúzni egy színes golyókkal teli zsákból. A klasszikus valószínűség azokat az eseteket nézi, amikor minden egyes lehetséges kimenetelhez ugyanakkora esély tartozik. Például, ha egy szabályos dobókockával dobunk, akkor ugyanakkora az esély arra, hogy 1, 2, 3, 4, 5, vagy 6-ost dobjunk. Ekkor egy tetszőleges esemény valószínűsége megadható a kedvező kimenetelek és az összes lehetséges kimenetelek számának hányadosával:

**Klasszikus valószínűség:** Az $A$ esemény valószínűsége megadható úgy, mint $P(A) = \dfrac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$.

Természetesen a későbbiekben ennél bonyolultabb esetekkel is fogunk találkozni, de az alapfogalmak megértéséhez ez a véges sok lehetőséget tartalmazó egyszerű modell is elegendő.

**Definícó** (Feltételes valószínűség).

Ha $B$ bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik? $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad$ ha $P(B) \neq 0$

**Definíció** (Események függetlensége).
$A$ és $B$ események függetlenek, ha
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ($A$ esemény bekövetkezése nem befolyásolja $B$ esemény bekövetkezését, és fordítva).

**Definícó** (Teljes eseményrendszer).

$B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha **1)** $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$−re **2)** $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

**Teljes valószínűség tétele:**
Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, $A$ tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden $j$-re. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

**Bayes-tétel:**
Legyen $B_1, ..., B_n, ...$ teljes eseményrendszer, $A$ tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden $j$-re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

**Valószínűségi változók:**

A kísérletek megfigyelése során bekövetkező különböző elemi eseményekhez különböző számértékeket rendelünk, például a mérőeszköz által mutatott értéket vagy két kocka dobásakor azoknak az összegét. Ekkor előfordulhat, hogy két különböző elemi eseményhez is rendelhetünk azonos számértéket, pl. két kocka dobásakor a ⚂⚄ és ⚃⚃ dobásokhoz is 8-ast rendelünk. Ezt a hozzárendelést nevezzük valószínűségi változónak, ami tehát egy függvény az elemi események halmazán, és így számszerűsíti a kísérlet eredményét.

**Definíció** ($X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye)**.** $F_X(x) = P(X < x)$.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai: $0 \le F_X(x) \le 1$;
monoton növő;
balról folytonos;
$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

**Állítás** Tetszőleges $X$ valószínűségi változó esetén $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$; $P(a < X \le b) = F(b+) - F(a+)$; $P(X = b) = F(b+) - F(b)$.

**Diszkrét eloszlások:**

**Definíció** (Diszkrét valószínűségi változó)**.** Értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ elemekből áll. Eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$ $(i = 1, \dots)$

## Feladatok

**1.1. Feladat.** Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

**1.2. Feladat.** Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

**1.3. Feladat.** Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

**1.4. Feladat.** Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

**1.5. Feladat.** $\star$ $n$ dobozba véletlenszerűen helyezünk el $n$ golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?

b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

**1.6. Feladat.** Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

**1.7. Feladat.** Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

**1.8. Feladat.** Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)

**1.9. Feladat.** Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

**1.10. Feladat.** $41$ millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy $5$-ös találat?

**1.11. Feladat.** $100$ érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej található). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal $10$-szer dobva, $10$ fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

**1.12. Feladat.** Egy diák a vizsgán $p$ valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy ekkor eltalálja a helyes választ $\frac{1}{3}$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

**1.13. Feladat.** Egy számítógépes program két független részből áll. Az egyikben $0,2$, a másikban $0,3$ a hiba valószínűsége. Ha a program hibát jelez, akkor mi a valószínűsége, hogy mindkét rész hibás?

**1.14. Feladat.** Egy számítógép processzorát $3$ üzemben készítik. $20\%$ eséllyel az elsőben, $30\%$ eséllyel a másodikban és $50\%$ eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre $10\%$, $4\%$, illetve $1\%$. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?

**1.15. Feladat.** Tegyük fel, hogy az új internet-előfizetők véletlenszerűen választott $20\%$-a speciális kedvezményt kap. Mi a valószínűsége, hogy $10$ ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

**1.16. Feladat.** Egy tétel áru $1\%$ selejtet tartalmaz. Hány darabot kell találomra kivennünk és megvizsgálnunk, hogy a megvizsgált darabok között legalább 0,95 valószínűséggel selejtes is legyen, ha az egyes kiválasztott darabokat vizsgálatuk után visszatesszük?

**1.17. Feladat.** Dobjunk egy kockával annyiszor, ahány fejet dobtunk két szabályos érmével. Jelölje $X$ a kapott számok összegét. Adjuk meg $X$ eloszlását!

**1.18. Feladat.** Jelölje $X$ az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét. Adjuk meg $X$ eloszlását!

**1.19. Feladat.** Egy érmével dobva (tfh. $p$ a fej valószínűsége), jelölje $X$ az első azonosakból álló sorozat hosszát. (Azaz pl., ha a sorozat FFI..., akkor $X = 2$.) Adjuk meg $X$ eloszlását!

**1.20. Feladat.** Legyenek az $X$ diszkrét valószínűségi változó értékei $-2, 1, 3$, a következő valószínűségekkel:

$$P(-2) = 1/2, \quad P(1) = 1/3, \quad P(3) = 1/6.$$

Számoljuk ki az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

# 2. (3-4 hét) Várható érték, szórás, abszolút folytonos eloszlások, függetlenség, aszimptotikus tulajdonságok

## Elmélet

**Definíció** (Diszkrét valószínűségi változó várható értéke)**.** Jelölése: $EX$.
Legyen $X$ diszkrét valószínűségi változó, amely az $x_1$,$x_2$,... értékeket veszi fel, $p_1$,$p_2$,... valószínűségekkel, ekkor

$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Legyen $X$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $p_i = P(X = x_i)$, ekkor $EX^2 = \sum_{x_i} {x_i}^2 p_i$.

**Állítás** Ha $EX$ és $EY$ véges, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor
$E(aX + b) = aEX + b$ és
$E(X + Y) = EX + EY$.

**Definíció** ($X$ szórásnégyzete)**.** $D^2X = E[(X - EX)]^2 = EX^2 - E^2X$

**Definíció** ($X$ szórása)**.** $DX = \sqrt{D^2X}$

**Nevezetes diszkrét eloszlások:**

| Név (paraméterek) | Értékek ($k$) | $P(X = k)$ | $EX$ | $D^2X$ |
|---|---|---|---|---|
| Indikátor ($p$) ( = Binomiális (1, $p$) ) | 0, 1 | $p^k(1-p)^{1-k}$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| Binomiális ($n, p$) | $0, 1, ..., n$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| Poisson ($\lambda$) | $0, 1, ...$ | $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Geometriai vagy Pascal ($p$) ( = Negatív binomiális (1, $p$) ) | $1, 2, ...$ | $p(1-p)^{k-1}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| Negatív binomiális ($n, p$) | $n, n+1, ...$ | $\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ | $\frac{n}{p}$ | $\frac{n(1-p)}{p^2}$ |
| Hipergeometriai ($N, M, n$) | $0, 1, ..., n$ | $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ | $n\frac{M}{N}$ | $n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$ |

**Abszolút folytonos eloszlások:**

**Definíció** (Abszolút folytonos valószínűségi változó)**.** Ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk. (Megjegyzés: Az $f$ sűrűségfüggvény létezéséhez szükséges (de nem elégséges), hogy $F$ folytonos legyen (azaz $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re).)

**Tétel.** *Legyen $X$ abszolút folytonos eloszlású. Ekkor $f(x) = F'(x)$; $f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0$ $\forall x$-re;*
$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

**Definíció** (Várható érték)**.** Legyen $X$ abszolút folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, ekkor

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$, ha az integrál létezik.

**Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:**

| Név (paraméterek) | Értékek | Eloszlásfüggvény ($F$) | Sűrűségfüggvény ($f$) | $EX$ | $D^2X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Standard normális $N(0,1)$ | $(-\infty,\infty)$ | $\Phi(x)=$ táblázatban | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\in\mathbb{R}$ | 0 | 1 |
| Normális N$(m,\sigma^2)$ | $(-\infty,\infty)$ | visszavezethető $\Phi(x)$-re | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x\in\mathbb{R}$ | $m$ | $\sigma^2$ |
| Egyenletes E$[a,b]$ | $[a,b]$ | $\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 1 & \text{ha } b<x\end{cases}$ | $\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponenciális Exp$(\lambda)$ | $(0,\infty)$ | $\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$ | $\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| Gamma $\Gamma(\alpha,\lambda)$ | $(0,\infty)$ | nincs zárt elemi képlet | $\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$ | $\frac{\alpha}{\lambda}$ | $\frac{\alpha}{\lambda^2}$ |

Normális eloszlás standardizálása: Legyen $X\sim N(m,\sigma^2)$, ekkor $\dfrac{X-m}{\sigma}\sim N(0,1)$.

**Függetlenség:**

**Definíció** (Valószínűségi változók függetlesége)**.** Az $X_1,X_2,\dots X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha bármely $I_1,I_2,\dots,I_n$ intervallumra $P(X_1\in I_1,\dots,X_n\in I_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i\in I_i)$
Megjegyzés: Független valószínűségi változók függvényei is függetlenek lesznek.

**Tétel** (Valószínűségi változók függetlensége)**.** *(i) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük megegyezik eloszlásfüggvényeik szorzatával, azaz $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ $\forall x$-re.*
*(ii) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha*
$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$ *$\forall x_i$-re.*
*(iii) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek ha*
$f(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ *$\forall x_i$-re.*

**Definíció** ($X$ és $Y$ kovarianciája)**.** $cov(X,Y)=E(XY)-EXEY$

**Definíció** (X és Y korrelációja)**.** $R(X,Y)=\dfrac{cov(X,Y)}{DXDY}$

Ha $X$ és $Y$ függetlenek $\Rightarrow cov(X,Y)=0$, de fordítva nem igaz.
$D^2(aX+b)=a^2D^2X,\quad D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2cov(X,Y)$

**Egyenlőtlenségek:**

**Tétel** (Markov-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton növő pozitív függvény, $X\ge 0$ valószínűségi változó, melyre $EX<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{E\left(g(X)\right)}{g(\varepsilon)}$$

*Spec., ha $g(x)=x$, akkor*

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{EX}{\varepsilon}$$

**Tétel** (Csebisev-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $X$ tetszőleges valószínűségi változó, melyre $D^2X<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{D^2X}{\varepsilon^2}$$

**Aszimptotikus tulajdonságok:**

**Tétel** (Nagy számok törvénye (NSZT))**.** *Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}m \qquad \textit{1 valószínűséggel.}$$

**Tétel** (Centrális határeloszlás tétel (CHT))**.** *Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m$, $D^2X_1=\sigma^2<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\dots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}N(0,1) \qquad \textit{gyengén,}$$

*azaz*

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<x\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\Phi(x)$$

*ahol $\Phi$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.*

## Feladatok

**2.1. Feladat.** Tegyük fel, hogy a 3 valószínűségszámítás gyakorlatra rendre 15, 20, illetve 25 diák jár. Várhatóan mekkora egy véletlenszerűen kiválasztott diák csoportja?

**2.2. Feladat.** Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

**2.3. Feladat.** Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettőn 1-es, kettőn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerűen $m$ lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

**2.4. Feladat.** Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?

b) páros számok számának várható értéke?

**2.5. Feladat.** Egy adott területről származó talajmintákban a spórák száma Poisson-eloszlású. A minták harmadában egyáltalán nincs spóra. Mi a valószínűsége annak, hogy egy mintában a spórák száma egynél több? Mekkora a spórák számának várható értéke és szórása?

**2.6. Feladat.** Tegyük fel, hogy egy számítógép meghibásodási időpontja 0 és 10 év között van és itt geometriai modellel írható le. Határozzuk meg a jelenség eloszlásfüggvényét!

**2.7. Feladat.** Legyen $0<Y<3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x)=cx^3$ . Mennyi $c$ és $P(-1<Y<1)$?

**2.8. Feladat.** Legyen $X$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó a $[0,c]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & \text{ha } 0\le x<c\\ 0, & \text{ha } x<0 \text{ vagy } x\ge c.\end{cases}$$

Határozza meg $c$-t és $X$ eloszlásfüggvényét!

**2.9. Feladat.** Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2+y^2<1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét valamint várható értékét!

**2.10. Feladat.** Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

a) kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

b) több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

c) 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

d) Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

**2.11. Feladat.** Egy tehén napi tejhozamát normális eloszású valószínűségi változóval, $m=22,1$ liter várható értekkel és $\sigma=1,5$ liter szórással, modellezzük.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 liter közé esik?

b) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m-\sigma$ es $m+\sigma$ közé?

($\Phi(0,6)=0,7257, \Phi(1,93)=0,9732, \Phi(1)=0,8413$)

**2.12. Feladat.** Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető.

*Standard normális eloszás eloszlásfüggvényének értékei:* `https://zempleni.elte.hu/stdnormelo.pdf`

**2.13. Feladat.** Legyen $X$ egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon Számítsuk ki $(X-1)^2$ várható értékét!

**2.14. Feladat.** Legyen $X$ és $Y$ független valószínűségi változók mindkettő 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen $W = X-Y$. Számítsa ki $W$ várható értékét és szórását!

**2.15. Feladat.** Adjon meg véges sok értéket felvehető ($X$) ill. végtelen sok értéket felvehető ($Y$) diszkrét valószínűségi változókat melyeknek szórása 1!

**2.16. Feladat.** Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki
a) $EW$-t és $D^2W$-t, ill.
b) $P(W \leq 6)$-ot!
($\Phi(1) = 0,8413$)

**2.17. Feladat.** Legyen $X$ és $Y$ független valószínűségi változók, melyre $D^2X < \infty$ és $D^2Y < \infty$.
a) Mutassa meg, hogy $X + Y$ és $X$ kovarianciája egyenlő $X$ szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $X + Y$ és $X$ korrelációját!

**2.18. Feladat.** Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független? ($\Phi(1{,}28) = 0{,}8997$)

**2.19. Feladat.** Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?
($\Phi(1{,}12) = 0{,}8686$)

**2.20. Feladat.** Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású ideig töltődnek.
a) Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
($\Phi(2, 42) = 0, 992, \Phi(1, 645) = 0, 95$)

**2.21. Feladat.** Legyen egy $X$ pozitív valószínűségi változó várható értéke $EX = 3$ és szórása $DX = 3$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 13-at vagy annál nagyobb értéket! Mennyi a valószínűség pontos értéke, ha feltesszük, hogy az eloszlás exponenciális?

**2.22. Feladat.** Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől?

# 3. (6-7 hét) Leíró statisztikák, statisztikai alapfogalmak, becslések (maximum likelihood, momentum)

## Elmélet

**Definíció** (Minta)**.** $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változó sorozat. A továbbiakban feltesszük, hogy függetlenek és azonos eloszlásúak. Realizációja: $x_1, ..., x_n$

**Definíció** (Statisztika)**.** A minta valamely függvénye, pl.:

*Mintaátlag v. átlag:* $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

*Tapasztalati szórás:* $S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

*Korrigált tapasztalati szórás:* $S_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

*Szórási együttható (vagy relatív szórás):* $V = \frac{S_n}{\overline{X}} = \frac{S_n}{\overline{X}}100\%$ *(az átlagtól való átlagos eltérés százalékban)*
*/megjegyzés: lehet a korrigált tapasztalati szórással is számolni/*

*k-adik tapasztalati momentum* ($k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$)*:* $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

*Tapasztalati módusz: a legtöbbször előforduló érték*
*Rendezett minta:* $X_1^* \leq ... \leq X_n^*$ *a mintaelemek nem csökkenő sorrendben*

*Tapasztalati medián:* $X^*_{\frac{n+1}{2}}$*, ha* $n$ *páratlan és* $\frac{X^*_{\frac{n}{2}} + X^*_{\frac{n}{2}+1}}{2}$*, ha* $n$ *páros*

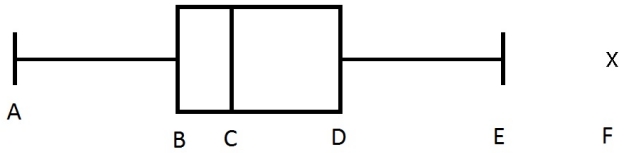
*Terjedelem:* $R = X_n^* - X_1^*$ *(legnagyobb − legkisebb mintaelem)*
*z-kvantilis:* $q_z = \inf\{x : F(x) \geq z\}$*. Ha* $F$ *invertálható, akkor* $q_z = F^{-1}(z)$*.*
*Tapasztalati z-kvantilis:* $q_z$ *értelmezése: a mintaelemek* $z$*-ed része legfeljebb a* $q_z$*, (*$1-z$*)-ed része pedig legalább a* $q_z$ *értéket veszi fel (*$0 < z < 1$*); sokféleképpen számolható, pl. interpolációs módszerrel: először megállapítjuk a sorszámot:* $(n+1)z = e + t$ *(e: egészrész, t: törtrész), majd kiszámoljuk a z-kvantilist:* $q_z = X_e^* + t(X_{e+1}^* - X_e^*)$*.*
*Kvartilisek: Speciális kvantilisek, alsó (vagy első) kvartilis:* $Q_1 = q_{\frac{1}{4}}$*,*
*medián:* $Q_2 = q_{\frac{1}{2}}$*,*
*felső (vagy harmadik) kvartilis:* $Q_3 = q_{\frac{3}{4}}$
*Interkvartilis terjedelem:* $IQR = q_{\frac{3}{4}} - q_{\frac{1}{4}} = Q_3 - Q_1$

*Tapasztalati eloszlásfüggvény:* $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < x)$

*ahol* $I(X_i < x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_i < x \\ 0 & \text{ha } X_i \geq x \end{cases}$ *indikátor függvény*

**Tétel** (Glivenko-Cantelli)**.** *Az* $F_n(x)$ *tapasztalati eloszlásfüggvény és az* $F(x)$ *elméleti eloszlásfüggvény közötti eltérés maximuma 1 valószínűséggel 0-hoz konvergál, ami azt jelenti, hogy elég nagy minta esetén* $F_n(x)$ *éréke minden* $x$*-re tetszőleges közel van* $F(x)$ *értékéhez és* $n$*-et növelve mindenütt annak közelében marad.*

**Definíció** (Boxplot)**.**




$A = \max\{x_1^*, Q_1 - 1,5 \cdot IQR\}$, $B = Q_1$, $C = Q_2$, $D = Q_3$, $E = \min\{x_n^*, Q_3 + 1,5 \cdot IQR\}$
*F: kieső értékek, azokat tüntetjük fel pontokként, amik A-n vagy E-n kívülre esnek*

*Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók (minta) egy $\vartheta$ paraméterrel és legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. A becslés a minta eloszlásának ismeretlen paraméterét közelíti a minta segítségével.*

**Definíció** (Torzítatlan becslés)**.** A $\vartheta$ valós paraméter $T(\mathbf{X})$ becslése torzítatlan, ha $E(T(\mathbf{X})) = \vartheta$ minden $\vartheta$ paraméterértékre.

**Definíció** (Likelihood függvény)**.** $L(\vartheta; \mathbf{x}) = f_\vartheta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i)$, ha az eloszlás abszolút folytonos

$L(\vartheta; \mathbf{x}) = P_\vartheta(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(X_i = x_i)$, ha az eloszlás diszkrét

**Definíció** (Log-likelihood függvény)**.** $l(\vartheta; \mathbf{x}) = \ln(L(\vartheta; \mathbf{x}))$

**Paraméterbecslési módszerek:**

*Maximum likelihood módszer (ML-módszer):*

*Azt a paraméterértéket keressük, ahol a likelihood függvény a legnagyobb értéket veszi fel (azaz diszkrét esetben az ismeretlen paraméter azon értéket keressük, amely mellett a bekövetkezett eredmény maximális valószínűségű): $\max_\vartheta L(\vartheta; \mathbf{x})$. Ez nyilván megegyezik azzal a paraméterértékkel, ahol a log-likelihood függvény veszi fel a legnagyobb értéket, azaz: $\max_\vartheta l(\vartheta; \mathbf{x})$.*

*Amennyiben a függvény deriválható $\vartheta$ szerint, akkor a maximumot kereshetjük a szokásos módon, a deriváltak segítségével, azonban a feladatunkat jelentősen megnehezíti, hogy olyan n-szeres szorzatot kellene deriválni, amelyiknek minden tagjában ott van az a változó, ami szerint deriválnunk kellene. Ezért likelihood függvény helyett a log-likelihood függvény maximumhelyét keressük.*

*Ha $\vartheta$ 1 dimenziós, akkor $\partial_\vartheta l(\vartheta, \mathbf{x}) = 0$, míg ha $\vartheta = (\vartheta_1, ..., \vartheta_p)$ $p$ dimenziós, akkor $\partial_{\vartheta_i} l(\vartheta, \mathbf{x}) = 0$ megoldásából kapjuk a becslést. (A második deriváltak segítségével ellenőrizzük, hogy valóban maximum.)*

**Tétel** (ML-becslés invariáns tulajdonsága)**.** *Ha $\vartheta$ ML-becslése $\hat{\vartheta}$, akkor tetszőleges $g$ függvény esetén $g(\vartheta)$ ML-becslése $g(\hat{\vartheta})$.*

*Momentum módszer:*

*A mintából számítható tapasztalati momentumokat ($m_i := \frac{1}{n}\sum_j x_j^i$) egyenlővé tesszük az elméleti momentumokkal ($M_i(\vartheta) := E_\vartheta X^i$), mégpedig annyit, amennyiből a paramétereket meg tudjuk határozni. $p$ darab ismeretlen paraméter esetén tipikusan $p$ ismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg $\vartheta$-ra: $M_1(\vartheta) = m_1, \ldots M_p(\vartheta) = m_p$ (megjegyzés: $m_1 = \overline{x}$)*

## Feladatok

**3.1. Feladat.** Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $m$ várható értékkel. Célunk az ismeretlen $m$ paraméter becslése. Tekintsük az alábbi statisztikákat és állapítsuk meg, hogy melyek torzítatlanok! Amelyik nem torzítatlan, hogyan tudnánk torzítatlanná tenni?

$T_1(\mathbf{X}) = X_8, \qquad T_2(\mathbf{X}) = \dfrac{X_9 + X_{19}}{9}, \qquad T_3(\mathbf{X}) = \overline{X}$

**3.2. Feladat.** Adjon torzítatlan becslést a független, azonos $E[0, \vartheta]$ eloszlású $X_1, \ldots, X_n$ minta $\vartheta$ paraméterére a mintaátlag segítségével!

**3.3. Feladat.** Legyen az alábbi gyakorisági tábla egy 20 elemű minta, a következő diszkrét eloszlásból:
$P(X_i = -1) = c, P(X_i = 1) = 3c, P(X_i = 2) = 1 - 4c$ $\big(i = 1, \ldots 20$ és $c$ az ismeretlen paraméter, $0 < c < \frac{1}{4}\big)$.

| érték | $-1$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| gyakoriság | 4 | 10 | 6 |

Határozza meg $c$ ML-becslését és $c$ becslését a momentum módszerrel!

**3.4. Feladat.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók az alábbi eloszlásokból. Számolja ki az ismeretlen paraméter ML-becslését!
a) $Bin(m, p)$ binomiális eloszlás, ahol $m \in \mathbb{N}$ adott és $p$ a paraméter
b) $Exp(\lambda)$ exponenciális eloszlás
c) $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás, ahol $\sigma \in \mathbb{N}$ adott és $\mu$ a paraméter

**3.5. Feladat.** Határozza meg az ismeretlen paraméter ML-becslését, ha a minta $E[a, 1]$ eloszlású!

**3.6. Feladat.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos $E[a, b]$ eloszlású valószínűségi változók. Számolja ki az ismeretlen paraméterek becslését a momentum módszerrel!

# 4. (8-9 hét) Konfidenciaintervalluok, paraméteres próbák

## Elmélet

**Definíció** (Konfidenciaintervallum a normális eloszlás várható értékére)**.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ független azonos eloszlású valószínűségi változók (tfh. $\sigma$ ismert). Ekkor az $(1-\alpha)100\%$-os konfidenciaintervallum $m$-re: $\overline{X} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ahol $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a standard normális $1-\frac{\alpha}{2}$-kvantilisét jelöli.

## Hipotézisvizsgálat

*Hipotézis: állítás, aminek igazságát vizsgálni szeretnénk*
*Statisztikai próba: eljárás aminek a segítségével döntést hozhatunk a hipotézisről*

*Legyen $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ független, azonos eloszású minta. Jelölje $\mathcal{X}$ a mintateret, azaz a minta lehetséges értékeinek halmazát.*

*Nullhipotézis:* $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$
*Ellenhipotézis:* $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$

*Paramétertér:* $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$
*Döntés: $T(\boldsymbol{X})$ statisztika ($T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ próbastatisztika) segítségével, melynek ismerjük az eloszlását a nullhipotézis fennállása esetén*

*Mintateret két részre bontjuk: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_e \cup \mathcal{X}_k$ és $\mathcal{X}_e \cap \mathcal{X}_k = \emptyset$*
*$\mathcal{X}_k$: kritikus tartomány − azon $\boldsymbol{X}$ megfigyelések halmaza, amikre elutasítjuk a nullhipotézist*
*$\mathcal{X}_e$: elfogadási tartomány − azon $\boldsymbol{X}$ megfigyelések halmaza, amikre elfogadjuk a nullhipotézist*
*Kritikus érték: $c$ (függ $\alpha$-tól, ld. alább)*
$\mathcal{X}_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : T(\boldsymbol{x}) \geq c\}$ *vagy* $\mathcal{X}_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : T(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ *vagy* $\mathcal{X}_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : |T(\boldsymbol{x})| \geq c\}$
$\mathcal{X}_e = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : T(\boldsymbol{x}) < c\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_e = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : T(\boldsymbol{x}) > c\}$ $\quad$ $\mathcal{X}_e = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : |T(\boldsymbol{x})| < c\}$

| | *Döntés* | |
|---|---|---|
| *Valós állapot* | *$H_0$-t elfogadjuk ($\mathcal{X}_e$)* | *$H_0$-t elvetjük ($\mathcal{X}_k$)* |
| *$H_0$ igaz ($\vartheta \in \Theta_0$)* | *helyes döntés ($1-\alpha$)* | *elsőfajú hiba ($\alpha$)* |
| *$H_0$ hamis ($\vartheta \in \Theta_1$)* | *másodfajú hiba ($\beta$)* | *helyes döntés ($1-\beta$)* |

*Elsőfajú hiba valószínűsége:*
*Egyszerű hipotézis ($\Theta_0$ halmaz egyelemű) esetén:* $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}_k) = \alpha \quad \vartheta_0 \in \Theta_0$ $\quad$ */ = ℙ(elvetjük $H_0$-t | $H_0$ igaz) /*
*Összetett hipotézis ($\Theta_0$ halmaz több elemű) esetén:* $\mathbb{P}_\vartheta(\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}_k) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$

*Próba (pontos) terjedelme vagy **szignifikanciaszintje**:* $\alpha = \sup\{\mathbb{P}_\vartheta(\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}_k) : \vartheta \in \Theta_0\}$
***Megbízhatósági (konfidencia-) szint**:* $1-\alpha$ $\quad$ */ = ℙ(elfogadjuk $H_0$-t | $H_0$ igaz) /*

*A próba meghatározása: előre rögzített $\alpha$ terjedelemhez azt a $c$ értéket keressük, amire a próba pontos terjedelme éppen $\alpha$.*

*Másodfajú hiba valószínűsége:*
$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}_e) = 1 - \mathbb{P}_\vartheta(\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}_k) \quad \vartheta \in \Theta_1$ $\quad$ */ = ℙ$_\vartheta$(elfogadjuk $H_0$-t | $H_0$ hamis) /*

***Erőfüggvény:*** $\psi(\vartheta) = 1 - \beta(\vartheta)$ $\quad$ */ = ℙ(elvetjük $H_0$-t | $H_0$ hamis) /*
*Minél erősebb a próba, annál nagyobb valószínűséggel veti el a hamis nullhipotézist. Vagyis a próba ereje annak a valószínűsége, hogy egy adott eltérést adott mintanagyság és terjedelem mellett egy statisztikai próba kimutat. (Kísérletek tervezésekor az erő nagyságának előre meghatározott értékéből határozható meg a szükséges mintanelemszám.) A próba erejét addig nem tudjuk kiszámolni, ameddig az ellenhipotézis egy értékét nem rögzítjük ill. nem mondjuk meg a különbég nagyságát, amit ki szeretnénk mutatni.*

***p-érték**: annak a valószínűsége, hogy igaz $H_0$ esetén a próbastatisztikára a tapasztalt vagy annál nagyobb eltérést kapunk. Ha egy próbát számítógép segítségével végzünk el, rendszerint a p-érték révén tudunk dönteni: ha p-érték$< \alpha$, akkor elvetjük $H_0$-t.*

*A hipotézisek nem egyenrangúak. $H_0$-t csak indokolt esetben szeretnénk elutasítani, így az elsőfajú hiba súlyosabbnak számít, mint a másodfajú hiba (különösen, ha csak kicsi az eltérés a $H_0$-hoz képest). Általában az elsőfajú hiba legnagyobb valószínűségét adjuk meg, de a másodfajú hiba csökkentésére is törekszünk (pl. mintanagyság növelésével).*
***$H_0$ elfogadása**: statisztikailag nem találtunk komoly bizonyítékot arra, hogy $H_0$ nem lenne igaz; vagyis $H_0$ elfogadása esetén sem lehet állítani, hogy $H_0$ teljesül*

***$H_0$ elvetése**: statisztikailag komoly bizonyítékot találtunk arra, hogy a $H_0$ nem igaz, azaz $H_1$ igaz*

***Próbák normális eloszlás várható értékére***

***Egymintás próbák***

$X_1, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$

| | | |
|---|---|---|
| $H_0 : m = m_0$ | $H_0 : m \le m_0$ | $H_0 : m \ge m_0$ |
| $H_1 : m \neq m_0$ | $H_1 : m > m_0$ | $H_1 : m < m_0$ |

*Egymintás u-próba ($\sigma$ ismert)*

*Próbastatisztika:* $T(\boldsymbol{X}) = u = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$

*Kritikus tartományok:*

$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ $\quad \mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : u > u_{1-\alpha}\}$ $\quad \mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : u < u_{\alpha}\}$

*Kapcsolat a konfidenciaintervallummal (az alábbi lépések ekvivalensek):*

$$\boxed{|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \Leftrightarrow u > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ vagy } u < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ vagy } \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{X} - m_0 > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ vagy } \overline{X} - m_0 < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \boxed{m_0 \notin \left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

*Vagyis a null hipotézist pontosan akkor utasítjuk el, ha a $(1-\alpha)100\%$-os konfidenciaintervallum nem tartalmazza $m_0$-t.*

*Egymintás t-próba ($\sigma$ ismeretlen)*

*Próbastatisztika:* $T(\boldsymbol{X}) = t = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n-1}$

*Kritikus tartományok:*

$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |t| > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$ $\quad \mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : t > t_{n-1,1-\alpha}\}$ $\quad \mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : t < t_{n-1,\alpha}\}$

***Kétmintás próbák***

$X_1, \dots, X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $\quad Y_1, \dots, Y_m \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ $\quad$ *függetlenek*

| | | |
|---|---|---|
| $H_0 : m_1 = m_2$ | $H_0 : m_1 \le m_2$ | $H_0 : m_1 \ge m_2$ |
| $H_1 : m_1 \neq m_2$ | $H_1 : m_1 > m_2$ | $H_1 : m_1 < m_2$ |

| | *a két minta független* | | *a két minta páronként összetartozó, nem független* |
|---|---|---|---|
| $\sigma_1$ *és* $\sigma_2$ *ismert* | *Kétmintás u-próba* | | *Egymintás u-próba a különbségekre* |
| $\sigma_1$ *és* $\sigma_2$ *ismeretlen* | *előzetes F-próba* | | *Egymintás t-próba a különbségekre* |
| | $\sigma_1 = \sigma_2$ | $\sigma_1 \neq \sigma_2$ | |
| | *Kétmintás t-próba* | *Welch-próba* | |

*előzetes F-próba ($\sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen)*

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

*Próbastatisztika:*

$$F = \begin{cases} \frac{(s_1^*)^2}{(s_2^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{n-1,m-1} & \text{ha } s_1^* > s_2^* \\ \frac{(s_2^*)^2}{(s_1^*)^2} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} F_{m-1,n-1} & \text{ha } s_2^* > s_1^* \end{cases}$$

*Kétmintás u-próba ($\sigma_1, \sigma_2$ ismert)*

*Próbastatisztika:* $u = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} N(0,1)$

*Kétmintás t-próba ($\sigma_1 = \sigma_2$ ismeretlen)*

*Próbastatisztika:* $t = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}} \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)(s_1^*)^2 + (m-1)(s_2^*)^2}{n+m-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n+m-2}$

*Welch-próba ($\sigma_1 \neq \sigma_2$ ismeretlen)*

*Próbastatisztika:* $t' = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(s_1^*)^2}{n} + \frac{(s_2^*)^2}{m}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_f$ *, ahol* $f \approx \dfrac{\left(\frac{(S_1^*)^2}{n} + \frac{(S_2^*)^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(S_1^*)^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{(S_2^*)^2}{m}\right)^2}{m-1}}$

## Feladatok

**4.1. Feladat.** Legyen $X_1, X_2, X_3, X_4$ független azonos $N(\mu, 2^2)$ eloszlású minta. A megfigyelt értékek a következők: 14,8; 12,2; 16,8; 11,1

a) Adjon $95\%$-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot $\mu$-re!

b) Hány elemű mintára van szükség, ha azt szeretnénk, hogy a konfidenciaintervallum legfeljebb $1{,}6$ hosszúságú legyen?
($u_{0{,}975} = 1{,}96$)

**4.2. Feladat.** Azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten $15°$C alatt van-e? Az elmúlt 4 év napi középhőmérsékletei a következők voltak: $14,8; 12,2; 16,8; 11,1\ °C$, valamint tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.

a) Írjuk fel a null- és ellenhipotézist!

b) Tegyük fel, hogy a napi középhőmérséklet szórása $\sigma = 2$. Tesztelje a fenti hipotézist $\alpha = 0.05$ terjedelem mellett! Adja meg a kritikus tartományt és p-értéket! Mi a döntés?

c) Teszteljük a hipotézist úgy is, hogy nem használjuk a szórásra vonatkozó előzetes információt!

d) Milyen hipotézist írjunk fel, ha azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten $15°$C-tól különböző-e? Teszteljük a fenti adatok segítségével!

($u_{0{,}05} = -1{,}645,\ \Phi(1{,}275) = 0{,}899,\ t_{3;0{,}05} = -2{,}353\ u_{0{,}975} = 1,96$)

**4.3. Feladat.** Az alábbi két minta két különböző gyáregységben tapasztalt selejtarányra vonatkozik (ezrelékben). Állítható-e, hogy az „A" gyáregység jobban dolgozott? (Feltételezhetjük, hogy a minták normális eloszlásúak, függetlenek.)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 11,9 | 12,1 | 12,8 | 12,2 | 12,5 | 11,9 | 12,5 | 11,8 | 12,4 | 12,9 |
| B | 12,1 | 12,0 | 12,9 | 12,2 | 12,7 | 12,6 | 12,6 | 12,8 | 12,0 | 13,1 |

($F_{9,9;0{,}975} = 4{,}026,\ t_{18;0{,}05} = -1{,}734$)

**4.4. Feladat.** Két szervert hasonlítottunk össze. Az elsőn 30 futás átlagos ideje 6,7 mp volt, míg ettől függetlenül a másodikon 20 futásé 7,2 mp. Vizsgáljuk meg, hogy van-e szignifikáns különbség a két szerver sebessége közt, ha a futási idők szórása mindkét gépen 0,5 volt?
($u_{0{,}975} = 1{,}96$)

**4.5. Feladat.** Az alábbi két minta $10$ forgalmas csomópont levegőjében található szennyezőanyag koncentrációra vonatkozó két adatsort tartalmaz. Az első sorban a november 15-i, a másodikban a november 29-i számok szerepelnek. Szignifikánsan változott-e a légszennyezettség?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| november 15. | 20,9 | 17,1 | 15,8 | 18,8 | 20,1 | 15,6 | 14,8 | 24,1 | 18,9 | 12,5 |
| november 29. | 21,4 | 16,7 | 16,4 | 19,2 | 19,9 | 16,6 | 15,0 | 24,0 | 19,2 | 13,2 |

($t_{9;0{,}975} = 2{,}262$)

# 5. (10-11 hét) Nemparaméteres próbák, egyszerű lineáris regresszió

## Elmélet

## Nemparaméteres próbák:

### Diszkrét illeszkedésvizsgálat

*Legyen $X_1, \dots, X_n$ egy $n$ elemű minta és tegyük fel, hogy a mintaelemek $r$ különböző $x_j$ $(j = 1, \dots r)$ értéket vehetnek fel. Továbbá jelölje $\nu_j (j = 1, \dots r)$ az egyes értékek megfigyelt gyakoriságát, azaz $n$ független megfigyelést osztályozunk valamilyen szempont szerint, $r$ páronként diszjunkt osztályba. Az egyes osztályok feltételezett valószínűségei rendre $p_1, \dots p_r$.*

| *Osztályok* | *1* | *2* | *...* | *r* | *Összesen* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Értékek* | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_r$ | |
| *Gyakoriságok* | $\nu_1$ | $\nu_2$ | ... | $\nu_r$ | *n* |
| *Valószínűségek* | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_r$ | *1* |

*Azt vizsgáljuk, hogy a minta eloszlása megegyezik-e a feltételezett eloszlással. Ismert eloszlás esetén tiszta illeszkedésvizsgálatot végzünk. Ha viszont az eloszlás paraméteres és csak az eloszláscsaládot ismerjük, a paraméter(eke)t viszont nem (pl. az a kérdés, hogy származhatnak-e az adatok $p$ paraméterű binomiális eloszlásból), akkor becsléses illeszkedésvizsgálatot végzünk.*

Tiszta illeszkedésvizsgálat:

$H_0 : P(X_i = x_j) = p_j \quad j = 1, \dots, r$
$H_1 : \exists$ *legalább egy* $j$ *melyre* $P(X_i = x_j) \neq p_j$

*Próbastatisztika:* $T_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-1}$ *Kritikus tartomány:* $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\}$

Becsléses illeszkedésvizsgálat:

*Legyen $\vartheta$ egy $s$ dimenziós paramétervektor, valamint legyen $\hat{\vartheta}$ a $\vartheta$ paramétervektor ML-becslése, és legyen $\hat{p}_j = p_j(\hat{\vartheta})$.*

$H_0 : P(X_i = x_j) = \hat{p}_j \quad j = 1, \dots, r$
$H_1 : \exists$ *legalább egy* $j$ *melyre* $P(X_i = x_j) \neq \hat{p}_j$

*Próbastatisztika:* $T_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-s-1}$ *Kritikus tartomány:* $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-s-1,1-\alpha}\}$

*Megjegyzés: Mivel a próba aszimptotikus, vigyáznunk kell arra, hogy a minta elemszáma elég nagy legyen. Ökölszabályként meg szokás követelni, hogy az ún. elméleti gyakoriság ($np_j$) legalább 5 legyen minden $i$-re. Ha ez nem teljesül, akkor a kis várt gyakoriságokkal rendelkező eseményeket összevonjuk.*

### Függetlenségvizsgálat

*$n$ független megfigyelést két szempont szerint osztályozunk, az 1. szempont szerint $r$ osztály, míg a 2. szempont szerint $s$ osztály van. Annak a valószínűsége, hogy egy megfigyelést az 1. szempont szerint az $i$-edik, a második szerint pedig a $j$-edik osztályba sorolunk, $p_{ij}$. Az ilyen tulajdonságú megfigyelések számát pedig $\nu_{ij}$-vel jelöljük. Az osztályozási eljárás eredményét ún. kontingenciatábla formájában szokás megadni:*

| | | *2. szempont* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *1* | *...* | *j* | *...* | *s* | *Sorösszegek* |
| | *1* | $\nu_{11}$ | ... | $\nu_{1j}$ | ... | $\nu_{1s}$ | $\nu_{1\bullet}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| *1. szempont* | *i* | $\nu_{i1}$ | ... | $\nu_{ij}$ | ... | $\nu_{is}$ | $\nu_{i\bullet}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | *r* | $\nu_{r1}$ | ... | $\nu_{rj}$ | ... | $\nu_{rs}$ | $\nu_{r\bullet}$ |
| *Oszlopösszegek* | | $\nu_{\bullet 1}$ | ... | $\nu_{\bullet j}$ | ... | $\nu_{\bullet s}$ | $n$ |

$\nu_{ij}$ *= megfigyelések gyakorisága az* $(i, j)$ *osztályban*

$\nu_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} \nu_{ij} \quad \nu_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ij}$

*Hasonlóan $p_{i\bullet}$ ill. $p_{\bullet j}$ a marginális eloszlást jelölik, tehát a $[p_{ij}]$ mátrix sor-, illetve oszlopösszegei:* $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} \quad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$

*$H_0$: a két szempont független egymástól, azaz* $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \;\; 1 \leq i \leq r, \, 1 \leq j \leq s$

*$H_1$: a két szempont nem független, azaz $p_{ij} \neq p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ legalább egy $(i,j)$ párra*

*Próbastatisztika:* $T_n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}}{n}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$

*Kritikus tartomány:* $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{(r-1)(s-1),1-\alpha}\}$

*Megjegyzés: Ha $r = s = 2$, akkor a próbastatisztika a következőképpen leegyszerűsödik:*
$T_n = n \cdot \frac{(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})^2}{\nu_{1\bullet}\nu_{2\bullet}\nu_{\bullet 1}\nu_{\bullet 2}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_1$.

## Homogenitásvizsgálat

*Van két független mintánk (adatsorunk) az egyikben $n$, a másikban $m$ megfigyeléssel. Valamilyen szempont szerint $r$, páronként diszjunkt osztályba soroljuk a megfigyeléseket. Az $i$-edik osztály valószínűsége $p_i$ az 1. minta és $q_i$ a 2. minta esetén $(i = 1, 2, ..., r)$. Legyenek az egyes osztályok gyakoriságai $\nu_1, \ldots, \nu_r$ az 1. minta és $\mu_1, \ldots, \mu_r$ a 2. minta esetén.*

| *Osztályok* | *1* | *2* | *...* | *r* | *Összesen* |
|---|---|---|---|---|---|
| ***1. minta*** | | | | | |
| *Gyakoriságok* | $\nu_1$ | $\nu_2$ | ... | $\nu_r$ | $n$ |
| *Valószínűségek* | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_r$ | 1 |
| ***2. minta*** | | | | | |
| *Gyakoriságok* | $\mu_1$ | $\mu_2$ | ... | $\mu_r$ | $m$ |
| *Valószínűségek* | $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_r$ | 1 |

*Azt vizsgáljuk, hogy a két minta ugyanolyan eloszlás szerint sorolódik-e be az egyes osztályokba:*

*$H_0$ : a két eloszlás megegyezik, azaz $p_i = q_i$ $i = 1, \ldots r$*
*$H_1$ : a két eloszlás nem megegyezik meg, azaz $\exists$ legalább egy $i$, hogy $p_i \neq q_i$*

*Próbastatisztika:* $T_{n,m} = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-1}$ *Kritikus tartomány:* $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : T_{n,m}(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\}$

## Korreláció becslése:

*Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ és $Y_1, \ldots, Y_n$ $n$ elemű minták. A korreláció becslése a minták alapján:*

*Tapasztalati korrelációs együttható:* $r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 \sum(y_i - \overline{y})^2}}$

## Egyszerű lineáris regresszió:

*Adott $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ számpárokra szeretnénk egyenest illeszteni.*

*Modell:* $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, *ahol* $E\varepsilon_i = 0$ *és* $D^2\varepsilon_i = \sigma^2 < \infty \quad (i = 1, \ldots, n)$

*Cél: $a$ és $b$ becslése*

*Módszer: legkisebb négyzetek:* $\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$

*Megoldás:* $\hat{b} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$*, ez torzítatlan $b$-re és a szórásnégyzete:* $D^2(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$

$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$*, ez torzítatlan $a$-ra és a szórásnégyzete:* $D^2(\hat{a}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\right)$

*Reziduálisok:* $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$

*Reziduális szórásnégyzet becslése:* $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}$

*Determinációs együttható:* $R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2} = r^2$ *Az $R^2$ mutatja meg, hogy $X$ változékonysága mennyire magyarázza $Y$ változékonyságát. Értéke 0 és 1 között lehet, minél nagyobb, annál jobban teljesít a model, azaz annál jobban illeszkedik az egyenes.*

## Feladatok

**5.1. Feladat.** Egy gyárban egy termék minőségét $4$ elemű mintákat véve ellenőrzik, havonta 300 mintavétellel. Megszámolták, hogy a legutóbbi hónapban hányszor volt selejtes a minta, melynek eredményét az alábbi táblázat tartalmazza:

| Selejtesek száma | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Darabszám | 80 | 113 | 77 | 27 | 3 |

Modellezhető a mintákban levő selejtesek száma
a) $(4; 0,25)$, ill.
b) $(4; p)$ paraméterű binomiális eloszlással $(\alpha = 0,05)$? $\left(\chi^2_{3;0,95} = 7,81,\ \chi^2_{2;0,95} = 5,99\right)$

**5.2. Feladat.** Az alábbi kontingencia-táblázat mutatja, hogy egy 100 éves időszakban egy adott hónapban a csapadék mennyisége és az átlaghőmérséklet hogyan alakult:

| Hőmérséklet \| Csapadék | kevés | átlagos | sok |
|---|---|---|---|
| hűvös | 15 | 10 | 5 |
| átlagos | 10 | 10 | 20 |
| meleg | 5 | 20 | 5 |

A cellákban az egyes esetek gyakoriságai találhatóak. $\alpha = 0,05$ mellett tekinthető-e a csapadékmennyiség és a hőmérséklet függetlennek? $(\chi^2_{4;0,95} = 9,49)$

**5.3. Feladat.** Két dobókockával dobva az alábbi gyakoriságokat figyeltük meg:

| Dobások | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. kocka | 27 | 24 | 26 | 23 | 18 | 32 |
| 2. kocka | 18 | 12 | 15 | 21 | 14 | 20 |

$\alpha = 0,05$ mellett döntsünk arról, hogy tekinthető-e a két eloszlás azonosnak! $\left(\chi^2_{5;0,95} = 11,1\right)$

**5.4. Feladat.** A következő feladatot csak R-rel kell megoldani, a számolások tájékoztató jellegűek, ha valakit érdekel, nem szerepelnek a számonkérésen. Adottak a következő $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ párok:

| $\mathbf{x}$ | 0 | 1 | 6 | 5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{y}$ | 4 | 3 | 0 | 1 | 2 |

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk is az $a + bx$ alakú regressziós egyenest!
b) Mi az $x = 2$-höz tartozó előrejelzett $y$ érték?
c) Számoljuk ki a reziduálisokat és becsüljük meg a hiba szórásnégyzetét, valamint a becsléseink szórásnégyzetét!