Valószínűségszámítás vizsga,
BSc, 2020. jan. 22., megoldás-vázlatokkal

3. Itt több eset is van, attól függően, hogy milyen típusú az intervallum.

9. A legegyszerűbb talán az a megoldás, hogy a legfeljebb 5-ösökből álló dobások valószínűségéből levonjuk a legfeljebb 4-esekből álló dobások valószínűségét: $\frac{5^3}{6^3} - \frac{4^3}{6^3} = \frac{61}{216}$.

10. F(-1/2)=3/4, E(1/X)=-2.

11. Itt a függvény $(x^2 - 4)$ **nem szigorúan monoton, így talán a legegyszerűbb az eloszlásfüggvénnyel számolni, ügyelve az abszolút értékre. Az is lényeges része az eredménynek, hogy megadjuk a val.változó értékkészletét, ami most a (-4,-3) intervallum.**

13. F(x,y)=xy/2 a téglalapon, de nemtriviális eset még az is, hogy fölötte x/2, tőle jobbra pedig y az értéke.

14. Pontosan a páros n-ekre van ilyen B: legyen az elemszáma n/2 és egyelemű a metszete A-val (pl B: a páros számok).

15. A trükk az, hogy $B_1 : X = 1$, $B_2 : X > 1$ **és ezzel mint teljes eseményrendszerrel** $E(X) = p \cdot 1 + (1-p)(1+E(X))$**, mert a második esetben újrakezdődik a kísérlet azzal, hogy egy rossz kísérletünk már volt.**

16. $1/\omega^n \to \infty$**, tehát nem konvergens ez a sorozat.**

17. Mivel E(X)=1/2, ezért a határeloszlás tétel alkalmazható és a keresett valószínűség éppen $1 - \Phi(0) = 1/2$.

18.$2X - Y \sim N(0, \sqrt{5})$**, tehát már csak standardizálni kell.**

22. Ha exponenciális eloszlás adja meg a buszok követési idejét, akkor az örökifjú tulajdonsága miatt a mi várakozási időnknek is ugyanaz az eloszlása és így a várható értéke is. Egy másik példa: ha a buszok kettesével járnak 10 percenként, akkor az átlagos követési idő 5 perc, ami megegyezik a mi várható várakozási időnkkel.

Az alábbi kérdéseket külön lapon dolgozza ki!

(1) Definiálja a hipergeometrikus eloszlást! *(3 p.)*

(2) Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát! *(3 p.)*

(3) Hogyan számíthatjuk ki az intervallumba esés valószínűségét az eloszlásfüggvényből? *(3 p.)*

(4) Definiálja a korrelációt! *(3 p.)*

(5) Mondja ki a Csebisev egyenlőtlenséget! *(3 p.)*

(6) Mondja ki a Borel Cantelli lemmát és megfordítását! *(3 p.)*

(7) Mondja ki a nagy számok gyenge törvényét! *(3 p.)*

(8) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy négygyerekes családban azonos neműek a gyerekek! (Tegyük fel, hogy a fiúk és lányok születési valószínűsége is 0.5 és hogy az egyes születések függetlenek.) *(4 p.)*

(9) Dobjunk fel 3 szabályos kockát! Mi a valószínűsége, hogy a legnagyobb dobott szám az 5? *(4 p.)*

(10) Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$ és 0 különben. Adjuk meg X eloszlásfüggvényének értékét a -1/2 helyen. $E(1/X)$=? *(8 p.)*

(11) Legyen X egyenletes eloszlású a [-1,1] intervallumon. Adja meg $(X-2)(X+2)$ sűrűségfüggvényét. *(4 p.)*

(12) Rajzolja fel a $\lambda = 1$ és $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvényét! *(4 p.)*

(13) Adja meg a $[0,2] \times [0,1]$ téglalapon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét! *(4 p.)*

(14) Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n\}$, $P(i) = 1/n$ $(1 \leq i \leq n)$ és $A = \{1, 2\}$. Milyen n-re adható meg olyan B esemény, amire $0 < P(B) < 1$ és B és A függetlenek! Válaszát indokolja! *(5 p.)*

(15) Vezesse le a Pascal eloszlás várható értékét a teljes várható érték tétel segítségével! *(5 p.)*

(16) Legyen $\Omega = [0; 1]$, az intervallumok valószínűsége pedig a hosszúságuk. Mit mondhatunk az $X_n(\omega) = 1/\omega^n$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikus konvergenciájáról? (Válaszát indokolja!) *(4 p.)*

(17) Legyenek az $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos, eloszlású valószínűségi változó-sorozat tagjai, sűrűségfüggvényük $f(x) = 6x(1-x)$ ha $0 < x < 1$ és 0 különben. Mihez tart $P(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n/2}{\sqrt{n}} > 0)$? *(6 p.)*

(18) Legyen X és Y független, azonos standard normális eloszlású. Adja meg a $P(2X > Y + 1)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének segítségével! *(5 p.)*

(19) Definiálja a Q-Q plot diagrammot és írja le, hogy mikor alkalmazzuk! *(5 p.)*

(20) Tegyük fel, hogy nekünk 5 eurónk van, az ellenfelünknek pedig 10. Egyeurós tétekkel fej-írás játékot játszva, mekkora valószínűséggel nyerjük mi el ellenfelünk összes pénzét? *(3 p.)*

(21) Igazolja, hogy a normális eloszlás az egyetlen véges szórású stabilis eloszás! Mondjon példát nem véges szórású stabilis eloszlásra! *(7 p.)*

(22) Adjon meg olyan eloszlást a buszok követési idejére, ahol éppen ennek az eloszlásnak a várható értékével egyezik meg a várakozási időnk várható értéke! Indokolja is az eredményt! *(5 p.)*

(23) Mi olvasható le az ábráról? *(6 p.)*