Valószínűségszámítás vizsga,
2020. jan. 8., megoldás-vázlatokkal

5. Itt nem a nagy számok erős törvényét kellett írni, hanem a $P\{w : X_n(w) \to X(w)\} = 1$ definíciót.

9. E=2/3*1/2+1/3*1=2/3.

11. Nincs ilyen c, mert a függvény az 1-ben előjelet vált.

12. $P(Z_n - n/2 < \sqrt{n}) = P\left(\frac{Z_n - n/2}{\sigma\sqrt{n}} < 1/\sigma\right)$, ahol $\sigma = D(X_1) = 1/2$ a centrális határeloszlás tétel miatt (X_1 az első dobásnál a fej indikátora).

15. $G(x) = ((1-p)+px)^n$ az (n,p) paraméterű binomiális elo. generátorfv.-e, és tudjuk, hogy $X+Y$ generátorfv.-e független tagú összegre. $G_X(x)G_Y(x) = ((1-p)+px)^n((1-p)+px)^m = ((1-p)+px)^{n+m}$, ami éppen az $(n+m,p)$ paraméterű binomiális elo. generátorfv.-e

16. A polinomiális tétel szerinti kifejtésben a várható értéket tagonként véve, a függetlenség miatt adódik, hogy csak $E(X_i^2X_j^2)$ és $E(X_i^4)$ alakú tagok maradnak. Ezt a nagy számok erős törvényének bizonyításánál használtuk.

18. Ha $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = 1/3$, akkor X és X^2 korrelálatlan, de nem független.

19. Ez egyenletes eloszlás a körön, ami nen független komponensű, hiszen van olyan négyzet, mely 0 valószínűségű, de mindkét vetülete belemetsz a körbe és így pozitív a valószínűsége, azaz nem függetlenek a komponensek. Ezt a peremeloszlások sűrűségfüggvényének kiszámításával is lehet igazolni (ügyelve hogy a határok függnek az éppen aktuális értéktől).

20. Itt az előadás dia csak egy kis részét válaszolja meg a kérdésnek. Az is lényeges, hogy a cél az f eloszlásból való véletlen szám előállítása. A levezetés pedig azon múlik, hogy a számunk g eloszlású és ezt f/g-vel arányos valószínűséggel fogadjuk el, azaz a végeredmény sűrűsége f-fel lesz arányos, de akkor persze csak f lehet.

22. Itt az a helyzet, mint az elődáson látott teljes összeg-befektetésnél, mert hiába nagyobb 1-nél a játék után várható pénzünk, a "tipikus" esetben (1 nyerés-1 vesztés) csak 1,5*0,6=0,9-szerese marad, azaz a pénzünk 1 valószínűséggel 0-hoz tart annak ellenére, hogy a várható értéke $\to \infty$. Ez formálisan is igazolható az órán látott módszerrel.

23. 0 várható értékű normális eloszlások, a folytonos standard ($\sigma = 1$), a szaggatott pedig $\sigma = 2$ szórású (ez a maximum értékének a képlettel való összevetéséből jön ki - persze kicsit eltérő eredményt is elfogadtam).

Az alábbi kérdéseket külön lapon dolgozza ki!

(1) Definiálja diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlását! *(3 p.)*

(2) Definiálja a feltételes valószínűséget! *(3 p.)*

(3) Definiálja események (2,n) függetlenségét! *(3 p.)*

(4) Definiálja a sűrűségfüggvény fogalmát! *(3 p.)*

(5) Definiálja az 1 valószínűségű (m.m) konvergenciát! *(3 p.)*

(6) Definiálja a normális eloszlást (adja meg a sűrűségfüggvényt)! *(3 p.)*

(7) Mondja ki a centrális határeloszlás tételt! *(3 p.)*

(8) Tegyük fel, hogy két külsőre egyforma doboz közül az egyikben 4 piros és 4 fehér, a másikban 6 piros és 2 fehér golyó van. A két doboz egyikét véletlenszerűen kiválasztjuk és visszatevés nélkül húzunk belőle 2 golyót. Ha mindkettő piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az első dobozt választottuk? *(4 p.)*

(9) Legyen X $p = 1/3$ paraméterű indikátorváltozó. $E(2^{(X-1)}) = ?$ *(4 p.)*

(10) Legyen X egyenletes a $[0,1]$-en. Adja meg X^2 eloszlását és várható értékét. *(4 p.)*

(11) Az X valószínűségi változó a $[0,2]$ intervallumból veszi fel az értékeit. Sűrűségfüggvénye ott $c(1-t)t^3$, ahol c valós paraméter. Mennyi c? *(4 p.)*

(12) n szabályos érmedobásnál Z_n-nel jelölve a fejek gyakoriságát, mihez tart $P(Z_n - n/2 < \sqrt{n})$, ha $n \to \infty$? *(4 p.)*

(13) Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = -2x$ ha $-1 < x < 0$. $D^2(X) = ?$ *(4 p.)*

(14) Adjon becslést a Csebisev egyenlőtlenség segítségével annak valószínűségére, hogy a szimmetrikus véletlen bolyongásra 100 lépés után $S_{100} \geq 20$. *(7 p.)*

(15) Igazolja generátorfüggvények segítségével, hogy független, azonos binomiális eloszlások konvolúciója is binomiális. *(7 p.)*

(16) Vezesse le az $X_1, ..., X_n$ független, azonos eloszlású, 0 várható értékű, véges negyedik momentumú változókra $E(X_1 + ... + X_n)^4$ képletét! Mire volt ez jó? *(7 p.)*

(17) Vezesse le a $[-1,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás karakterisztikus függvényének képletét! *(5 p.)*

(18) Adjon példát korrelálatlan de nem független valószínűségi változó-párra! *(4 p.)*

(19) Tekintsük az alábbi kétdimenziós sűrűségfüggvényt: $f(x,y) = 1$, ha $x^2 + y^2 < 1/\pi$ és 0 különben. Milyen eloszláshoz tartozik? Mit mondhatunk a komponenseinek az összefüggőségéről? *(6 p.)*

(20) Definiálja Neumann módszerét véletlen számok generálására. Igazolja is, hogy a kívánt tulajdonságú számot állítja elő! Mikor használná? *(7 p.)*

(21) Adja meg annak a valószínűségét, hogy a szimmetrikus bolyongásnál 10 lépés után a 4 pontban vagyunk! *(3 p.)*

(22) Egy olyan játékra tesszük fel pénzünk 50%-át, ahol a nyerés esélye 50% és ekkor tétünk megduplázódik, a vesztésnél pedig vigaszdíjként visszakapjuk tétünk 20%-át. Ha ezt a stratégiát tetszőlegesen sokszor ismételjük, mit mondhatunk a vagyonunkról? *(7 p.)*

(23) Irja rá az ábrára, hogy melyik tanult eloszláscsalád sűrűségfüggvényeit mutatják be és egészítse ki a jelmagyarázatot is. *(4 p.)*