Valószínűségszámítás vizsga, Informatika "A", illetve matematikai elemző specializációk 2018.jan.24.

Tesztkérdések. Rossz válasz: -1 pont, jó válasz 3 pont. Ahol több válasz is helyes: jó válaszonként 2 pont. Tesztmegoldások: A,A(neg.binom) A,A,AC,C,D,I,D,F (merthogy lehet Y=1 ott, ahol X=2), A (merthogy lehet Y=0 ott, ahol X=2).
Ötletek a kifejtős kérdésekhez:
9: exponenciális eloszlás adja meg a Poisson folyamatnál az első esemény időpontját.
11: $D^2 = 5$.
13: A szórásnégyzet vagy 0 vagy végtelen.
17: Legyenek a val. változók az egységnyi intervallumon értelmezve. $P(X_n = 1) = 1/n$ (különben 0) és mivel az $1/n$ sor összege végtelen, el lehet az intervallumokat úgy helyezni, hogy minden pontban végtelen sokszor legyen 1 az érték.

(1) Egy diák 3/4 valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Ha nem tudja tippel, a helyes tipp esélye 1/3. Tudjuk, hogy a diák jól felelt. Mennyi az esélye annak, hogy tényleg tudta a helyes választ?
A: 9/10 **B**: 3/4 **C**: 2/3 **D**: 6/7 **E**: 5/8 **F**: Más

(2) Egy kockával addig dobunk amíg a 3. hatos megjelenik. Az ehhez szükséges dobásszámot jelölje τ. Milyen eloszlású τ?
A: Más **B**: Binomiális **C**: Pascal **D**: Hipergeometriai

(3) Az X valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumból veszi fel az értékeit. Sűrűségfüggvénye ott $f(t) = ct(1 - t)$ alakú. Mennyi c?
A: 6 **B**: 4 **C**: 1/5 **D**: Ez nem lehet sűrűségfüggvény **E**: Más

(4) Legyen X Cauchy eloszlású valószínűségi változó. Mennyi X eloszlásfüggvényének az értéke a 0 helyen?
A: 1/2 **B**: $1/\pi$ **C**: Kevés az adat **D**: Más

(5) Melyik állítás(ok) **nem** igaz(ak)?
A: Ha X és Y korrelálatlanok, akkor $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$
B: Ha X és Y függetlenek, akkor $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$
C: $R(2X, 2Y) = 2R(X, Y)$ **D**: $\text{cov}(2X, 2Y)=4\text{cov}(X, Y)$

(6) Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$ és 0 különben.
(a) Adjuk meg X eloszlásfüggvényének értékét a -1/2 helyen.
(b) $E(1/X)$=?
(c) Adjuk meg $\sqrt{-X}$ sűrűségfüggvényének értékét az 1/2 helyen.
A: 0 **B**: 1/4 **C**: 3/4 **D**: -2 **E**: -3/2 **F**: 3/2 **G**: 2
H: 64/81 **I**: 1/2 **J**: 1 **K**: nincs értelmezve **L**: Más

(7) Legyen X egyenletes eloszlású a $\{0, 1, 2\}$ számokon, Y pedig egyenletes eloszlású a $\{0, 1\}$ számokon.
(a) Ha X és Y függetlenek, akkor mennyi lesz a $P(X + Y = 3)$ valószínűség?
(b) Mennyi a $P(X + Y = 3)$ valószínűség maximuma?
(c) Mennyi a $P(X + Y = 3)$ valószínűség minimuma?
A: 0 **B**: 1/12 **C**: 1/9 **D**: 1/6 **E**: 1/4 **F**: 1/3 **G**: 1/2 **H**: Más

Az alábbi kérdéseket külön lapon dolgozza ki!

(8) Vezesse le a normális eloszlás sűrűségfüggvényének képletét (a standard normális eloszlást felhasználva). (*4 p.*)

(9) Mondjon példát az egyenletes, az exponenciális és a normális eloszlás alkalmazására! (*3 p.*)

(10) Definiálja valószínűségi változók általános fogalmát. (*3 p.*)

(11) Legyen X és Y független, azonos standard normális eloszlású. Számítsa ki $2X - Y + 1$ szórásnégyzetét! (*5 p.*)

(12) Írja fel az exponenciális eloszlás eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Vezesse le a várható értékét. (*6 p.*)

(13) Adjon példát olyan X_n valószínűségi változó-sorozatra, amely független azonos eloszlású, de mégsem teljesül rá a centrális határeloszlástétel. (*4 p.*)

(14) Adja meg annak valószínűségét, hogy a véletlen, szimmetrikus bolyongást végző részecske 12 lépés után a 2 pontban lesz. (*3 p.*)

(15) Hogyan tudunk inverz módszerrel véletlen számot generálni? (*4 p.*)

(16) Definiálja a karakterisztikus függvényt és mondja ki legfontosabb tulajdonságait. (*6 p.*)

(17) Adjon példát olyan valószínűségi változó sorozatra, amely sztochasztikusan konvergál, de 1 valószínűséggel nem. (*4 p.*)

(18) Irja be a hiányzó szavakat a kipontozott helyekre: Ha Legyen X_n ..... valószínűségi változó-sorozat és $b_n \to \infty$ úgy, hogy $(X_1 + ... + X_n)/b_n \to X$ 1 valószínűséggel, akkor X ..... (*6 p.*)

(19) Legyenek az $X_1, X_2, ...X_n$ független, azonos, a (0,2) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó-sorozat tagjai Mihez tart $(X_1 + ... + X_n)/n$? (*4 p.*)

(20) Mondja ki a Borel Cantelli lemmát és megfordítását! (*4 p.*)

(21) Ismertesse a buszparadoxon lényegét. Melyik eloszlásnál volt a legkisebb és melyiknél a legnagyobb a várható várakozási idő? (*5 p.*)

(22) Írja le, mi olvasható le az ábráról. (*6 p.*)

Név:

1	2	3	4	5	6a	6b	6c	7a	7b	7c