Valószínűségszámítás vizsga, Informatika "A", illetve matematikai elemző specializációk 2018.jan.10.

Tesztkérdések. Rossz válasz: -1 pont, jó válasz 3 pont. Tesztmegoldások: AAAAAAAAAD. Ötletek a kifejtős kérdésekhez: 15-nél $E(XY) = \frac{1}{6}$, mert lehet 1 páratlan és 1 hatos (kétféle sorrendben). 16-nál $E(X)$-hez kell az X sűrűségfüggvénye, ami $f_X(x) = \int_x^1 6(1-y)dy$. Ugyanígy az Y sűrűségfüggvénye $f_Y(y) = \int_0^y 6(1-y)dx = 6y(1-y)$, ha $0 \le y \le 1$. 19-hez a folytonossági tétel tartozik. 22-nél hiányzik a nemnegativitási feltétel, ezért nem alkalmazható a Markov egyenlőtlenség. Például, ha $P(X = 5) = 3/5$ és $P(X = -5/2) = 2/5$, akkor $EX = 2$, de $P(X > 4) > 1/2$.

(1) Egy urnában 20 golyó van, amelyből 10 piros. 3 golyót kihúzunk visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között van piros golyó?
A: 7/8 **B**: 0.75 **C**: 17/19 **D**: Más

(2) Mennyi az esélye annak, hogy a kihúzott lottószámok között több a páratlan, mint a páros?
A: 1/2 **B**: 1/3 **C**: 2/3 **D**: Más

(3) Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi az X eloszlásfüggvényének az értéke a $\ln 2$ helyen?
A: 3/4 **B**: 1/2 **C**: 0.96 **D**: 1/4 **E**: Más

(4) Hogyan definiáltuk az eloszlásfüggvényt?
A: $P(X < z)$ ahol X val.vált., z valós **B**: $P(X \le z)$ ahol X val.vált., z valós
C: $P(X > z)$ ahol X val.vált., z valós
D: $Q_X(B)$ ahol X val.vált., B Borel halmaz **E**: Más

(5) Legyen X egyenletes eloszlású a $[0, 2]$ intervallumon. Mennyi lesz az $E(X-a)^2$ kifejezés minimális értéke, ha a befutja a valós számok halmazát?
A: 1/3 **B**: 0 **C**: 4/3 **D**: 2/3 **E**: Más

(6) Legyenek $X \sim N(1; 4)$ és $Y \sim N(2; 3)$ függetlenek ($N(m, \sigma)$ az m várható értékű és σ szórású normális eloszlást jelöli). Ekkor $P(X < 4 + Y) =?$ (Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye)
A: $\Phi(1)$ **B**: $\Phi(5)$ **C**: $\Phi(3)$ **D**: $\Phi(5/7)$ **E**: $\Phi(4)$ **F**: Más

(7) Legyen X a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mennyi az $Y = X^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $0 < t < 1$ helyen?
A: $\sqrt{t}$ **B**: t^2 **C**: t **D**: Más

(8) Az X valószínűségi változó a $[0, 2]$ intervallumból veszi fel az értékeit. Sűrűségfüggvénye ott $ct(t-1)$ alakú. Mennyi c?
A: Ez nem lehet sűrűségfüggvény **B**: 2/3 **C**: 3/2 **D**: 4 **E**: 6 **F**: 1/5 **G**: Más

(9) Tegyük fel, hogy egy adott útszakaszon a balesetek száma homogén, utóhatás nélküli folyamatnak tekinthető, évente 2.5 várható értékkel. Mi egy adott évben a balesetek legvalószínűbb száma?
A: 2 **B**: 3 **C**: 4 **D**: 1 **E**: 0 **F**: 18 **G**: nem egyértelmű **H**: Más

(10) Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, U pedig a $(0, 2\pi)$ intervallumon egyenletes eloszlású, függetlenek. Mi lesz az $\sqrt{2X}\cos U$ változó eloszlása?
A: exponenciális **B**: elfajult **C**: Poisson **D**: standard normális
E: binomiális **F**: hipergeometrikus **G**: egyenletes **H**: Más

Az alábbi kérdéseket külön lapon dolgozza ki!

(11) Definiálja a szórásnégyzetet és mondja ki legfontosabb tulajdonságait. (*5 p.*)

(12) Mondja ki a nagy számok törvényének minél több változatát. (*4 p.*)

(13) Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Számítsa ki az X várható értékét! (*5 p.*)

(14) Definiálja egy X valószínűségi változó eloszlását. (*3 p.*)

(15) Kétszer dobunk egy dobókockával. X jelöli a páratlan eredmények, Y a hatos eredmények számát. Mennyi X és Y kovarianciája? (*7 p.*)

(16) Legyen az (X, Y) valószínűségi változó-pár sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 6(1-y)$ ha $0 < x < y < 1$ és 0 különben.
(a) $E(X) =?$
(b) Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét!
(*8 p.*)

(17) Definiálja Markov láncokra az átmenetvalószínűség-mátrixot. Milyen tulajdonságai vannak? (*5 p.*)

(18) Mondja ki a centrális határeloszlás tételt. (*3 p.*)

(19) Mi a kapcsolat a karakterisztikus függvények és a gyenge konvergencia között? (*4 p.*)

(20) Definiálja a lognormális eloszlást és adja meg alkalmazási lehetőségét. (*4 p.*)

(21) Mutassa meg, hogy a peremeloszlások nem határozzák meg az együttest! (*3 p.*)

(22) Igaz-e, hogy ha az X val.változóra $EX = 2$, akkor $P(X > 4) \le 1/2$? (*4 p.*)

(23) Adjon példát olyan valószínűségi változó-sorozatra, melyre $X_n \to X$ 1 valószínűséggel, de van olyan z valós szám, amelyre $F_{X_n}(z) \not\to F_X(z)$ (*4 p.*)

(24) Hogyan tudunk inverz módszerrel véletlen számot generálni? (*4 p.*)

(25) Írja le, mi olvasható le az ábráról. (*6 p.*)

Név:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	16a	16b