# Valószínűségszámítás és statisztika előadás informatika BSC/B szakosoknak

2023/2024 2. félév

Zempléni András

andras.zempleni@ttk.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

# 1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Valószínűségszámítás tárgya
- Történet
- Alapfogalmak
- Valószínűségek kiszámítása

# Irodalom/1: Val.szám

- Elektronikus jegyzetek
  - Arató-Prokaj-Zempléni: Valószínűségszámítás elektronikus jegyzet (saját honlapomon)
  - Balázs M., Tóth B.: Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak.
  - Fazekas I. Valószínűségszámítás és statisztika
- Tankönyvek:
  - Prékopa: Valószínűségelmélet
  - Rényi: Valószínűségszámítás
  - S. Ross: A First Course in Probability
- Példatár:
  - Bognárné-Mogyoródi-Prékopa-Rényi-Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény

# Irodalom/2: mat.stat.

- Bolla-Krámli: Statisztikai következtetések elmélete. Tankönyv
- Fazekas (szerk.): Bevezetés a matematikai statisztikába. Tankönyv
- Móri-Szeidl-Zempléni: Matematikai statisztika példatár.
- Pröhle-Zempléni: Statistical Problem Solving in R. http://zempleni.elte.hu/Stat_R_Prohle_Zempleni R programnyelv bevezető, a benne szereplő statisztikai témák erősen átfednek az előadással

# Számonkérés

- Összevont jegy: zh-k alapján
  - Két  zh: 6. és 11. héten (gyakorlaton)
  - Harmadik zh: vizsgaidőszak első keddjén (május 21, 13 óra)
  - Pótzh: május 28 (14/16/18 óra)
- Részletes információk: https://zempleni.elte.hu/Valstatb24.html
- Előadások anyaga:         Canvasban

# Cél

- A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapjainak ismertetése
- Feladatmegoldási, alkalmazási készség kialakítása (gyakorlaton)
- Alkalmazási lehetőségek bemutatása (véletlen számok, hipotézisvizsgálat, regresszió stb.)

# Valószínűségszámítás helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert precízen megfogalmazott axiómáxra épül.
- Gyakorlati alkalmazásai: statisztikai következtetések levonása (pl.: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej jött ki, akkor 99.9% valószínűséggel állítható, hogy az érme nem szabályos).

# Történeti áttekintés 1.

- Első ismert feladat 1494-ből: játék idő előtti abbahagyása esetén hogyan osztozzanak? Helyes megoldás több, mint 100 évvel későbbi: Pascal (1623 – 1662), Fermat (1601 – 1665)
- Könnyen adható szimulációs megoldás (precíz számítás a gyakorlaton)
- Cardano (1540 körül) könyvet írt a kockajátékokhoz kapcsolódó valószínűségszámítási kérdésekről

# Történeti áttekintés 2.

- de Mére lovag kérdése:
  - Egy kockával négyszer dobva előnyös arra fogadni, hogy lesz hatos, de 2 kockával 24-szer dobva már nem előnyös arra fogadni, hogy lesz (6,6) a dobások között.
  - Megoldás: Pascal, Fermat (1654)
- Huygens (1657): Az első valószínűségszámítás könyv
- de Witt, Halley (1671): életjáradék-számítás valószínűségi alapon

# Történeti áttekintés 3.

- Jacob Bernoulli (1713): Ars Conjectandi (nagy számok törvénye)
- XVIII-XIX. sz: Moivre, Bayes, Gauss, Poisson
- Buffon: geometriai valószínűség bevezetése – paradoxonok
- XIX.sz: Csebisev, Markov, Ljapunov

# Történeti áttekintés 4.

- Axiomatizálás: Kolmogorov (1933)
- Modern alkalmazások:
  - Információelmélet (Shannon)
  - Játékelmélet (Neumann)
  - Matematikai statisztika (Fisher)
  - Sztochasztikus folyamatok
- Magyar tudósok:
  - Jordán Károly (1871-1959)
  - Rényi Alfréd (1921-1970)

# Véletlen kísérletek

- Olyan kísérletekkel foglalkozunk, amelyek eredményét nem tudjuk előre biztosan megmondani (kockadobás, lottóhúzás, meteorológiai, tőzsdei események stb).
- Az összes lehetséges eredmény: eseménytér.

# Alapfogalmak

- Eseménytér
  - Kísérlet egy lehetséges kimenetele: elemi esemény, jelölése $\omega$.
  - Elemi események összessége: eseménytér, $\Omega$ .
  - $\Omega$ részhalmazai: események $(A,B,C,\ldots)$.
  - Esemény akkor következik be, ha az őt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

# Példák

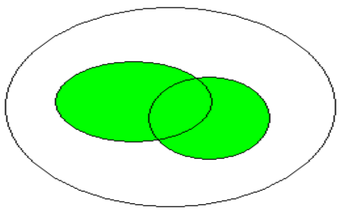
- Kockadobás: $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$. Ha az $A$ esemény: páros számot dobtunk, akkor $A=\{2,4,6\}$.
- Érmét kétszer feldobva: $\Omega=\{II,IF,FI,FF\}$ $A=\{II,IF\}$ az az esemény, hogy az első dobás írás.
- Érmét addig dobunk, míg fejet nem kapunk. $\Omega=\{F,IF,IIF,\ldots,\omega_\infty\}$ ahol $\omega_\infty=III\ldots$ (azaz minden dobás írás)

# Események

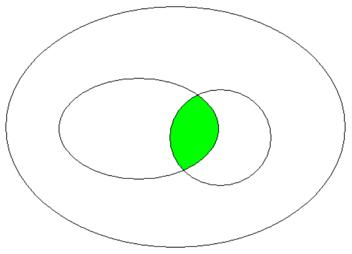
- Esemény: Ω részhalmaza
- Speciális események:
  - Ω (biztos esemény)
  - ∅ (lehetetlen esemény)
- Az események összessége: $\mathcal{A}$ (halmazrendszer Ω részhalmazaiból)
- Műveletek eseményekkel: szokásos logikai műveletek = halmazműveletek

# Műveletek eseményekkel

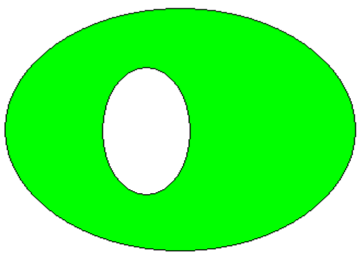
- $A \cup B$: vagy *A* vagy *B* bekövetkezik (az is lehet, hogy mindkettő)



- $A \cap B$: *A* és *B* is bekövetkezik

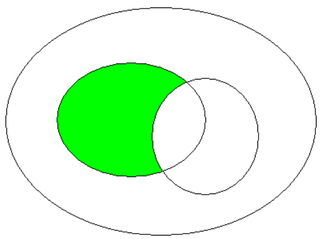


- *A* esemény ellentettje: $\overline{A}$



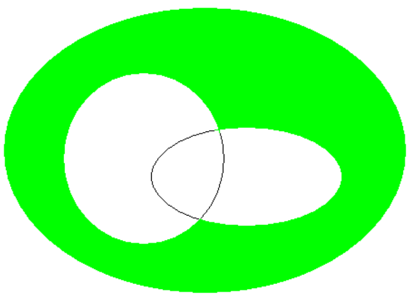
# Tulajdonságok

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(De Morgan)



$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\Omega} = \emptyset$$

# Valószínűség

- Szemléletes megfelelője: *relatív gyakoriság*. Ha $n$ egymástól függetlenül, azonos körülmények között végrehajtott kísérletből az adott $A$ esemény $k$-szor következett be, akkor a relatív gyakoriság $k/n$.
- Nagy $n$-re a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik: ezt nevezzük az $A$ valószínűségének.

# A valószínűség

- Jele: $P(A)$
- A relatív gyakoriság tulajdonságaiból:
  - Nemnegatív: $P(A) \geq 0$ minden A-ra
  - Egymást kizáró eseményekre, azaz, ha

    $$A \cap B = \varnothing: \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

    (additivitás). Az úgynevezett Kolmorogov-féle valószínűségi mezőnél ezt megszámlálhatóan végtelen sok, páronként egymást kizáró eseményre is megköveteljük
  - $P(\Omega)=1$

# Tulajdonságok 1.

- Additivitás $n$ eseményre: ha $A_1$, $A_2$ , ..., $A_n$ páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Bizonyítás: indukcióval.

- P(∅)=0.

Bizonyítás: Ω= Ω∪ ∅ felbontásból és az additivitásból

# Tulajdonságok 2.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ felbontásból és az additivitásból

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ felbontásból, az additivitásból és az előző tulajdonságból.

# Véges valószínűségi mező

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

Jelölés: $p_i = P(\omega_i)$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$$

az additivitásból.

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

Azaz a $p_i$ nemnegatív, 1 összegű számok meghatározzák a valószínűséget.

# Klasszikus valószínűségi mező

- $p_i$=1/n minden *i*-re (azonos valószínűségűek az elemi események).
- Ekkor $P(A) = \dfrac{k}{n}$ ahol *k* az *A* elemszáma,

  *n* pedig az összes esetszám.
- Másképpen: *P*(*A*)=kedvező esetek száma/ összes esetszám.
- Ez ismerős lehet a középiskolából

# Visszatevéses mintavétel

- $N$ termék, melyből $M$ selejtes
- $n$ elemű minta visszatevéssel
- $A$: pontosan $k$ selejtes van a mintában

($k$=0,…,$n$)

$$P(A)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^{k}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

# Visszatevés nélküli mintavétel

- *N* termék, melyből *M* selejtes
- *n* elemű minta visszatevés nélkül
- *A*: pontosan *k* selejtes van a mintában

($k$=0,…,$n$)

$$P(A) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

# Feltételes valószínűség 1.

- Az *A* esemény valószínűségét keressük.
- Tudjuk, hogy *B* esemény bekövetkezett.
- A relatív gyakoriságokkal: csak azokat a kísérleteket nézzük, amelyekben *B* bekövetkezett. Ezen részsorozatban az *A* relatív gyakorisága:

$$r_{A \cap B} / \ r_B$$

# Feltételes valószínűség 2.

- Megfelelője a valószínűségekre:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége (feltétel: $P(B)>0$).

- Példa: kockadobás. $A$={páros számot dobunk}
  $B$={3-nál nagyobbat dobtunk}
  $P(A|B)=2/3$.

# Teljes eseményrendszer

- *Definíció.* Események $A_1$, $A_2$ , ..., sorozata *teljes eseményrendszer*, ha egymást páronként kizárják és egyesítésük Ω.
- Tulajdonság: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots=1$
- Legtöbbször véges sok elemből álló teljes eseményrendszereket vizsgálunk.

# Teljes valószínűség tétele.

- Legyen $B_1$, $B_2$ , ..., pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A$ tetszőleges esemény. Ekkor

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots$$

- *Bizonyítás.* $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$

diszjunkt tagokra bontás, tehát

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots$$

és $P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$ adja a tételt.

# Bayes tétele

Legyen $B_1, B_2, \ldots,$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer,

$A \in \mathcal{A}$ pozitív valószínűségű. Ekkor

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

(Visszakövetkeztetés az első lépés eredményére.)

*Bizonyítás*. A nevező éppen $P(A)$ a teljes valószínűség tétele miatt.

A számláló pedig $P(A \cap B_k)$, definíció szerint.