Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak

2019/2020 2. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók várható értéke

- A múlt órán látott határátmenet segítségével (egyre finomabb felosztással közelítjük a folytonos eloszlást) E(X) ≈ΣyP(y<X<y+δ) ≈Σyδf(y) ≈∫yf(y)dy
- Ebből a definíció: az abszolút folytonos eloszlású X várható értéke: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)dy$ ha az integrál létezik.

Tulajdonságok, példák

- Mivel a diszkrét esetből határátmenettel kaptuk a fogalmat, a tulajdonságok (pl. E(aX+b)=aE(X)+b, E(X+Y)=E(X)+E(Y) stb.) most is érvényben maradnak.
- Ha X egyenletes eloszlású az [a,b]-ben, akkor

$$E(X)=\int_a^b \frac{y}{b-a}dy=\left[\frac{y^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

További példák

- Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor

$$E(X)=\int_0^{\infty}\lambda y e^{-\lambda y}dy=\left[-ye^{-\lambda y}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{\lambda}$$

- Ha X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

- Ha a Z változó Q_Z eloszlása keverék-eloszlás (azaz pl. p valószínűséggel X-et, 1-p valószínűséggel Y-t figyeljük meg), akkor E(Z)=pE(X)+(1-p)E(Y).

További eloszlások

- Gamma eloszlás, sűrűségfüggvénye a pozitív x értékekre: $\frac{\lambda(\lambda x)^{h-1}}{(h-1)!}e^{-\lambda x}$.
  (h∈N, λ>0 paraméterek)
- Lognormális eloszlás, sűrűségfüggvénye

$$f_X(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

- Cauchy eloszlás , sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- Néhány nevezetes eloszlás

Függvény várható értéke

- Legyen X sűrűségfüggvénye f és Y=g(X) (g Borel mérhető). Ekkor $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_X(y)dy$
- Bizonyítás az általános esetre a diszkrét valószínűségi változókra vonatkozó állításból határátmenettel. Spec. ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, g'>0, akkor $f_{g(X)}(z)=\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}$

  és így

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} z f_Y(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty} z\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}dz=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)g'(y)\frac{f_X(g^{-1}(g(y)))}{g'(g^{-1}(g(y)))}dy$$

A szórásnégyzet

- Mivel ez a várható értékből származtatott mennyiség, most is érvényes a $D^2(X):=E[(X-E(X))^2]$ definíció, illetve a $D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)$ számítási módszer. A korábban látott tulajdonságok itt is érvényben maradnak.

Példák

- Ha X egyenletes eloszlású az [a,b] intervallumon, akkor $$E(X^2)=\int_a^b \frac{y^2}{b-a}dy=\left[\frac{y^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

- Ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_0^\infty y^2\lambda e^{-\lambda y}dy=\left[-y^2e^{-\lambda y}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2ye^{-\lambda y}dy=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

A normális eloszlás szórásnégyzete

- Legyen X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

parciálisan integrálva. Így $D^2(X)=1$. Ebből az (m,σ) paraméterű normális eloszlás szórásnégyzete: $D^2(\sigma X+m)=\sigma^2$.

Momentumok

- X m-edik momentuma $E(X^m)=\int_{-\infty}^{\infty} y^m f_X(y)dy$
- X m-edik centrális momentuma

$$E(X-EX)^m=\int_{-\infty}^{\infty}(y-EX)^m f_X(y)dy$$

- Tulajdonság: ha az eloszlás szimmetrikus a 0-ra, akkor a páratlan rendű momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Következmény: ha az eloszlás szimmetrikus, akkor a páratlan rendű centrális momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Ha az m-edik momentum véges, akkor a k<m-edik is.