Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak

2019/2020 2. félév

Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

Konvolúció

- Független valószínűségi változók összegének eloszlása
- Most: nemnegatív, egész értékű esetre.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

- Példák: X, Y függetlenek, binomiális eloszlásúak (n,p), ill. (m,p) paraméterekkel. Ekkor

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}=$$

$$=p^{k}(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^{k}(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$$

Példák

- Azaz X+Y is binomiális (n+m,p) paraméterekkel. Spec.: $X= X_1+ X_2+\ldots +X_n$, ahol X_i p paraméterű indikátorváltozó, a tagok függetlenek is. Ebből is kijön, hogy E(X)=np, $D^2(X)=np(1-p)$.
- Példa 2: X, Y függetlenek, Poisson eloszlásúak λ, ill. μ paraméterekkel. Ekkor X+Y is Poisson, $\lambda+\mu$ paraméterrel.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{-\mu}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-i}k!}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}(\mu+\lambda)^k$$

Negatív binomiális eloszlás

- Legyen $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$, ahol X_i p paraméterű Pascal eloszlású változó, függetlenek. Ekkor X eloszlása:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

ha $k \geq r$ (különben 0). Elnevezés: r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. Ez éppen annak a kísérletnek a sorszáma, ahol az r-edik sikeres jön ki. Ez bizonyítja is a képlet helyességét (formálisan is meg lehet kapni a konvolúciós képletből indukcióval).

A negatív binomiális eloszlás

Valószínűségi változók általános fogalma (ismétlés)

- $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó, ha $\{\omega\colon X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- $Q_X(\mathrm{B}) := P\{\omega\colon X(\omega) \in B\}$ az X *eloszlása*.
- Ennek megadásához elegendő a félegyenesek valószínűségeit megadni: $F_X(z) := P(X<z)$ meghatározza $Q_X(\mathrm{B})$ értékét tetszőleges B-re (nem bizonyítjuk).

Az eloszlásfüggvény

- Az $F_X(z)$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.
- Tulajdonságai:
  - $0 \le F_X(z) \le 1$
  - $F_X(z)$ monoton növő
  - $\lim_{z\to\infty} F_X(z)=1$, $\lim_{z\to-\infty} F_X(z)=0$
  - $F_X(z)$ balról folytonos.
- Bizonyítás: Az első kettő triviális, az utolsó kettőhöz a valószínűség folytonossága kell:

  Ha $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

  ahol $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Bizonyítás

- Az A_n= (-∞,-n) választással alkalmazva a folytonosságot a Q_X valószínűségre adódik a 3. tulajdonság második fele.
- A folytonosságot a komplementerekre alkalmazva kapjuk, hogy ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ amit

  A_n= (-∞,n) választással alkalmazva éppen a 3. tulajdonság első felét kapjuk.
- Végül a 4. tulajdonsághoz A_n= (-∞,x-1/n) a jó választás, ekkor A= (-∞,x).

Példák

- Tetszőleges 1-4 tulajdonságú F-hez létezik X, aminek F az eloszlásfügvénye (pl. Ω=***R*** , P([a,b))=F(b)-F(a), X az identitásfüggvény
- A c pontban elfajult eloszlás eloszlásfüggvénye $$F(z)=\begin{cases}0, \text{ha } z \le c\\ 1, \text{ha } z > c\end{cases}$$
- Az indikátorváltozó eloszlásfüggvénye $$F(z)=\begin{cases}0, \text{ha } z \le 0\\ 1-p, \text{ha } 0 < z \le 1\\ 1, \text{ha } z > 1\end{cases}$$

Folytonos eloszlások

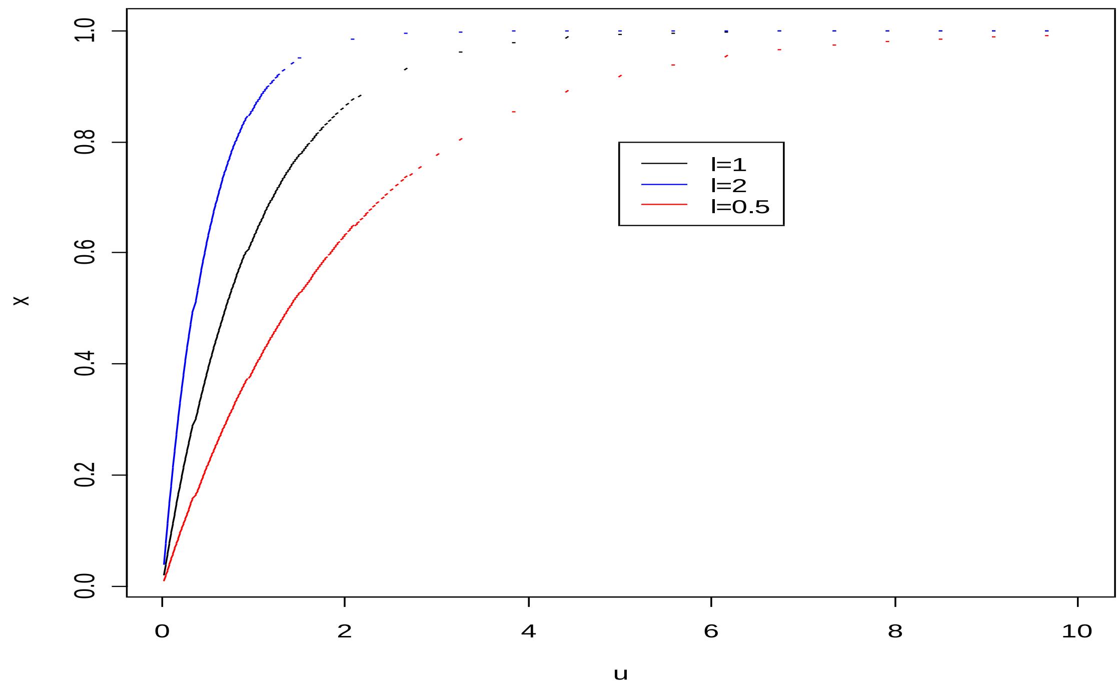
- Definíció. X folytonos eloszlású, ha eloszlásfüggvénye folytonos.
- Példa: egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon:

$$F(z)=\begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{z-a}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 1, \text{ha } z > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

$$F(z)=\begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1-e^{-\lambda z}, \text{ha } 0 < z \end{cases}$$

ahol λ>0 paraméter



Valószínűségek kiszámítása

- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(X=a) = F(a+0) - F(a)$, azaz ha F folytonos, minden egyes pont 0 valószínűségű.
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a+0)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b+0) - F(a)$