Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 2. félév

6. előadás

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

A szórásnégyzet tulajdonságai

- $D^2(X) \geq 0$, mert nemnegatív valószínűségi változó várható értéke.
- $D^2(aX+b)=a^2D^2(X)$, mert $D^2(aX+b)=$ $=E[(aX+b-E(aX+b))^2]= E[(aX+b-aE(X)-b)^2]=$ $=E[(aX-aE(X))^2]=a^2 E[(X-E(X))^2]$.
- Abból, hogy $E(X)$ véges, még nem következik $D^2(X)$ végessége, hiszen ha $P(X=k)=c/k^3$ (egyértelműen megadható olyan c, amire ez eloszlás lesz) akkor $E(X)$ véges, de $E(X^2)=c(1+1/2+\ldots+1/k+\ldots)$, ami végtelen.

Példák

- Az elfajult eloszlás szórásnégyzete:

$D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)=c^2-c^2=0.$

- Megfordítás: ha $D^2(X)= 0$, akkor X 1 valószínűséggel konstans.

  Biz.: $(X-E(X))^2 \geq 0$, várható értéke 0, tehát ő maga is 1 valószínűséggel 0, azaz $X=E(X)$ 1 valószínűséggel.

- A p valószínűségű A esemény indikátorának szórásnégyzete:

  $D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)= p - p^2= p(1-p)$. Azaz $p=0.5$ esetén a legnagyobb a szórásnégyzet.

- A kockadobás szórásnégyzete:

  $D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)=(1+4+...+36)/6 - 49/4=91/6 - 49/4$
  $=(182-147)/12=35/12.$

Példák/2

A Poisson eloszlás szórásnégyzete:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \lambda^{k-1} \frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^{k-2} \frac{e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Ebből

$$D^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Azaz a Poisson eloszlás várható értéke és szórásnégyzete megegyezik, ezt például a statisztikai alkalmazásoknál is lehet használni.

A szórás

- Szórásnégyzet mértékegysége az eredeti X mértékegységének a négyzete (azaz pl. a buszok követési időközénél négyzetperc). Ez nem teszi egyszerűvé interpretációját.
- Szórás: D(X) a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke. Ez már a megfelelő mértékegységű, $D(aX)=|a|D(X)$.

Összeg szórásnégyzete

- $D^2(X+Y)=E[(X+Y-E(X+Y))^2]=$
  $E[(X-E(X)+Y-E(Y))^2]=E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+$
  $+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=D^2(X)+D^2(Y)+$
  $+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
- Példák:
  - $X=Y$ esetén $D^2(X+Y)= D^2(2X)=4\, D^2(X)$
  - $X=-Y$ esetén $D^2(X+Y)= D^2(X-X)= D^2(0)=0$

azaz nem csak X és Y egydimenziós eloszlásától, hanem az együttes viselkedésüktől, azaz az együttes eloszlásuktól is függ az összegük szórásnégyzete.

A független val. változók esete

- *Állítás.* ha X,Y függetlenek, akkor E(XY)=E(X)E(Y).
- *Bizonyítás.*

$$E(XY)=\sum_{k,m} x_k y_m P(X=x_k, Y=y_m)$$

ami a függetlenség miatt így írható:

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)\sum_m y_m P(Y=y_m)=E(X)E(Y).$$

Kovariancia

- Definíció. Az X és Y kovarianciája:

$cov(X,Y):=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

- Kiszámítása: $cov(X,Y)= E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]=E(XY)-E(X)E(Y)$
- Az előzőek értelmében $cov(X,Y)=0$, ha X és Y függetlenek.
- Megj.: Abból, hogy $cov(X,Y)=0$ nem következik, hogy függetlenek: legyen X szimmetrikus a 0=ra (pl. $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=1/3$) és $Y=X^2$. Ekkor $cov(X,Y)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0-0$, hiszen $E(X^3)=E(X)=0$.
- A kovariancia szimmetrikus: $cov(X,Y)= cov(Y,X)$
- $cov(X,X)= D^2(X)$

Korrelációs együttható

- A kovariancia skálafüggő: cov(aX,bY)=$ab\cdot$cov(X,Y)
- A változók közötti lineáris kapcsolat erősségét mérő mennyiség a *korrelációs együttható*:

$$R(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

- Tulajdonságai:
  - R(X,Y)=0, ha X és Y függetlenek (ez sem fordítható meg)
  - Ez alapján definíció szerint legyen R(X,Y)=0, ha X vagy Y elfajult eloszlású.
  - R(X,aX+b)=1, ha a>0, mert cov(X,aX+b)=aD^2(X).

A korreláció tulajdonságai

Állítás: $|R(X,Y)|\leq 1$ és $|R|=1$ akkor és csak akkor, ha $X=aY+b$ 1 valószínűséggel ($a\neq 0$, $b\in \boldsymbol{R}$).

- Ehhez:

$$X^* = \frac{X-E(X)}{D(X)}, Y^* = \frac{Y-E(Y)}{D(Y)}$$

az úgynevezett standardizált változók. $E(X^*)=E(Y^*)=0$, $D(X^*)=D(Y^*)=1$. $R(X,Y)=E(X^*Y^*)$.

$0\leq E\,(X^*\pm Y^*)^2=E(X^{*2})\pm 2E(X^*Y^*)+E(Y^{*2})=2\pm 2E(X^*Y^*)$, tehát $|R(X,Y)|\leq 1$.

Ebből:

- $R=1$ akkor és csak akkor, ha $0=E\,(X^*-Y^*)^2$, azaz $X^*=Y^*$ 1 valószínűséggel. Ekkor $X=aY+b$, $a>0$.
- $R=-1$ akkor és csak akkor, ha $0=E\,(X^*+Y^*)^2$, azaz $X^*=-Y^*$ 1 valószínűséggel. Ekkor $X=aY+b$, $a<0$.