Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 2. félév

5. előadás

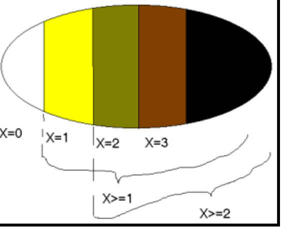
Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Tulajdonságok 2.

- Ha $X\geq 0$ és $E(X)$ véges, akkor $E(X)\geq 0$.
- Ha $E(X)$ véges, akkor $E(aX+b)=aE(X)+b$ (a várható érték lineáris).
- Ha X nemnegatív egész értékű, akkor $E(X)=P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+\ldots$



Alkalmazás: a Pascal eloszlás várható értéke

- $P(X\geq k)=(1-p)^{k-1}$, így
- $E(X)=1+(1-p)+(1-p)^2+\ldots=1/p$.
- Természetes eredmény: átlagosan a hatodik dobásra kapjuk az első hatost.
- Tulajdonság: a Pascal eloszlás örökifjú

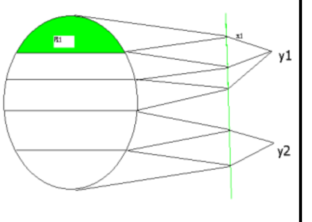
$$P(X>k+l\mid X>l)=P(X>k)$$

(k,l tetszőleges természetes számok).

Függvény várható értéke

- Legyen g: $\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$ függvény, X diszkrét valószínűségi változó, $p_i=P(X=x_i)$. Ekkor g(X) is valószínűségi változó, a várható értéke E(g(X)) az eredeti X változó eloszlásából is kiszámolható:

  $E(g(X))=p_1 g(x_1)+ +p_2 g(x_2)+\ldots$



Összeg várható értéke

- X, Y tetszőleges, véges várható értékűek. Ekkor $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. Bizonyítás a diszkrét esetre:

$$E(X+Y)=\sum_{k,m}(x_k+y_m)P(X=x_k,Y=y_m)=\sum_{k,m}x_kP(X=x_k,Y=y_m)+$$

$$+\sum_{k,m}y_mP(X=x_k,Y=y_m)=\sum_k x_kP(X=x_k)+\sum_m y_mP(Y=y_m)=E(X)+E(Y).$$

- Indukcióval: $E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$.

Alkalmazások

- A binomiális eloszlás várható értéke: $X=X_1+X_2\ldots+X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora.
- Az előző tulajdonság alapján $E(X)=E(X_1+X_2\ldots+X_n)=n\cdot E(X_1)=n\cdot p$.
- Ugyanígy a hipergeometrikus eloszlás várható értéke is $n\cdot p$ ($p=M/N$ a selejtarány).

Névjegy probléma

- n ember bedobja a névjegyét egy kalapba, ezután mindenki húz egyet véletlenszerűen. X: azon személyek száma, akik a saját névjegyüket húzzák.
- X_i: az i-edik ember a saját névjegyét húzza. $E(X_i)=P(X_i=1)=1/n$.
- $X=X_1+X_2\ldots+X_n$ és így a várható érték additivitása alapján
  $E(X)=E(X_1+X_2\ldots+X_n)=n\cdot E(X_1)=n\cdot 1/n=1$.
- Szimuláció

A feltételes várható érték

- Kocka-érme kísérlet: annyi érmével dobunk, amennyit dobtunk egy kockával. Ha a kockával i a dobott szám, az érméknél kapott fejek száma binomiális (i,1/2) paraméterrel. Ekkor tehát a várható fej-szám $i/2$.
- Formálisan/általánosan: ez a feltételes eloszlás várható értéke
  $$\sum_i x_i P(X=x_i \mid A) = E(X \mid A)$$
- Megjegyzés. Ha E(X) létezik, akkor E(X|A) is.

A teljes várható érték tétele

- Tegyük fel, hogy E(X) létezik, és legyen B_1, B_2, ..., pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer. Ekkor
  $$E(X)=E(X\mid B_1)P(B_1)+E(X\mid B_2)P(B_2)+\ldots$$
- *Bizonyítás.*
  $$\sum_i E(X\mid B_i)P(B_i)=\sum_i\sum_k x_k P(X=x_k\mid B_i)P(B_i)$$
  Az abszolút konvergencia miatt az összegzés sorrendje felcserélhető:
  $$=\sum_k x_k \sum_i P(X=x_k\mid B_i)P(B_i)=\sum_k x_k P(X=x_k)=E(X)$$

Következmény, példa

- Következmény (Wald azonosság) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású. N pedig tőlük független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Ekkor $Y=X_1+X_2+\ldots+X_N$ esetén $EY=E(N)E(X_1)$.
- Példa: Pascal eloszlás várható értéke (teljes várható érték tételből).

Valószínűségi változók szórásnégyzete

- Nem mindegy, hogy mekkora a vizsgált véletlen mennyiség ingadozása.
- Jobb, ha a buszok pontosan 10 percenként jönnek, mintha időnként 3 jön egymás után, és aztán 30 percet kell várni.
- Az ingadozás számszerűsítése: a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés, elnevezése: szórásnégyzet. Formálisan:
  $$D^2(X):=E[(X-E(X))^2].$$
- Kiszámítása: $D^2(X)=E[X^2-2XE(X)+E^2(X)]=$
  $=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)$
  a várható érték linearitása miatt. Azaz
  $$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X).$$

Tulajdonságok

- $D^2(X)\geq 0$, mert nemnegatív valószínűségi változó várható értéke.
- $D^2(aX+b)=a^2D^2(X)$, mert $D^2(aX+b)=$
  $=E[(aX+b-E(aX+b))^2]=E[(aX+b-aE(X)-b)^2]=$
  $=E[(aX-aE(X))^2]=a^2\,E[(X-E(X))^2]$.
- Abból, hogy E(X) véges, még nem következik $D^2(X)$ végessége, hiszen ha $P(X=k)=c/k^3$ (egyértelműen megadható olyan c, amire ez eloszlás lesz) akkor E(X) véges, de $E(X^2)=c(1+1/2+\ldots+1/k+\ldots)$, ami végtelen.