Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 2. félév

4. előadás

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Binomiális eloszlás alkalmazása

- Visszatevéses mintavétel más realizációja: független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, végezzünk n (rögzített számú) független kísérletet.
- X: az A bekövetkezésének gyakorisága (pontosan hányszor jött ki az A). X eloszlása binomiális (n,p).
- $X= X_1 + X_2 \ldots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora. Ezek az indikátorok függetlenek is!

Geometriai (Pascal) eloszlás

- Független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p>0$ valószínűségű esemény. Addig végzünk kísérleteket, míg A be nem következik.
- X: az első sikeres kísérlet sorszáma.

$p_k=P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$

Valóban valószínűségeloszlás $(p_1+p_2+\ldots=1)$

Azaz 0 a valószínűsége annak, hogy sosem kapunk fejet

geometriai eloszlás

Poisson eloszlás

$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $(k=0,1,2,\ldots;\ \lambda>0$ paraméter). Valóban eloszlás. Grafikusan

Állítás. Ha a binomiális eloszlás paramétereire $n\to\infty$ úgy, hogy $np\to\lambda$, akkor a határérték éppen a λ paraméterű Poisson eloszlás.

Bizonyítás. $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Alkalmazások

- Első példa: lórugás áldozatainak száma a porosz hadseregben.
- Poisson folyamat: időben lejátszódó folyamatnál adott $[a,b)$ intervallumba eső események száma $(X_{a,b})$ éppen $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlású, ha a folyamat
  - homogén: $X_{a,a+t}$ eloszlása csak t-től függ;
  - utóhatás nélküli: $X_{a,b}$ és $X_{b,c}$ függetlenek ha $a<b<c$;
  - nemelfajuló: $0<P(X_{a,b}=0)<1$.

Gyakorlati alkalmazások

- Balesetek száma
- Viharok száma
- Rendszer meghibásodásainak száma

Tulajdonság: ha kétféle esemény következhet be a folyamat során, akkor külön-külön az egyes események száma is Poisson folyamatot alkot.

Összefoglalás (diszkrét eloszlások)

- Binomiális eloszlás
  - Rögzített számú kísérletnél adott esemény gyakorisága (pl. 10 kockadobásból a hatosok száma)
  - Nagy mintaelemszámra, kicsi valószínűségnél a Poisson eloszlással közelíthető
- Pascal eloszlás
  - Addig kísérletezünk, míg egy adott esemény be nem következik, az első sikeres sorszáma (pl. az első hatost hányadik kockadobásnál kapjuk meg)
- Hipergeometriai eloszlás
  - Visszatevés nélküli mintavételnél adott típusú mintaelemek száma (pl. lottóhúzásnál az 5 találat valószínűsége)

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejátékban a pontos nyeremény nem látható előre. De: az átlagos nyereményről szeretnénk tudni. (Kedvező-e a játék? Fair játék: az ár éppen a várható érték.)
- Példa: Dobókocka: annyi a nyereményünk, amennyit dobunk. Ennek átlagos értéke 1/6(1+2+…+6)=21/6=3.5
- De ha nem szabályos a kocka, például az egyes helyett is 6 van, akkor az átlagos nyeremény 1/6(2+…+5)+6/3=13/3.
- *Definíció.* A $p_i=P(X=x_i)$ eloszlással megadott valószínűségi változó *várható értéke* $E(X):=p_1x_1+p_2x_2+\ldots$, ha a sor abszolút konvergens.

Példák

- Az elfajult eloszlás várható értéke: $E(X)=cP(X=c)=c$.
- A p valószínűségű A esemény indikátorának várható értéke: $E(X)=1P(X=1)=p$
- *Az* $x_1, x_2,\ldots x_n$ számokon egyenletes eloszlás (mindegyik valószínűsége 1/n) várható értéke a számok számtani közepe.
- Az (n,p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$$

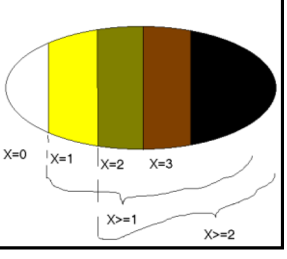
- Amerikai rulett. Ha k számra teszünk, a nyereményünk 36/k. A várható nettó nyeremény (36/k)· (k/38)-1= - 2/38.

Tulajdonságok

- Nem minden valószínűségi változónak van véges várható értéke:
  $P(X=2^k)=(1/2)^k \quad k=1,2,\ldots$
  esetén $E(X)=1+1+1+\ldots=\infty$.
- Azaz annak a játéknak az „ára”, ahol 2^k Ft-ot kapunk, ha szabályos érmével k-adikra dobunk először fejet: végtelen. Ez a Szt.Pétervári paradoxon; gyakorlatban persze nem reális így ez a játék, hiszen nincs az a bank, amely korlátlan pénzt tudna fizetni.
- Ha $E(X)$ véges, akkor az abszolút konvergencia miatt egyértelmű is.

Tulajdonságok 2.

- Ha $X\geq 0$ és $E(X)$ véges, akkor $E(X)\geq 0$.
- Ha $E(X)$ véges, akkor $E(aX+b)=aE(X)+b$ (a várható érték lineáris).
- Ha X nemnegatív egész értékű, akkor $E(X)=P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+\ldots$



Alkalmazás: a Pascal eloszlás várható értéke

- $P(X\geq k)=(1-p)^{k-1}$, így
- $E(X)=1+(1-p)+(1-p)^2+\ldots=1/p$.
- Természetes eredmény: átlagosan a hatodik dobásra kapjuk az első hatost.
- Tulajdonság: a Pascal eloszlás örökifjú

$$P(X>k+l\mid X>l)=P(X>k)$$

(k,l tetszőleges természetes számok).