Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak

2019/2020 2. félév

Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

Események függetlensége

- Ha a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A valószínűségét, azaz $P(A|B)$=P(A), akkor azt mondjuk, hogy az A és B függetlenek. Ez így nem ideális definíció (nem szimmetrikus, $P(B)>0$ kell hozzá), ezért
- Definíció. Az A és B *események függetlenek*, ha $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Tulajdonságok

- Ha A és B diszjunktak, akkor csak triviális ($P(A)=0$ vagy $P(B)=0$) esetben függetlenek.
- Ha A és B függetlenek, akkor komplementereik is függetlenek.
- Önmaguktól csak a triviális (P(A)=0 vagy P(A)=1) események függetlenek.
- $A\subset B$ esetén csak akkor függetlenek, ha legalább az egyik triviális.
- Tipikus eset függetlenségre: A az első, B a második kísérlet eredménye.

Általánosítás

- Két eseményrendszer független, ha az első tetszőleges eleme független a második tetszőleges elemétől.
- n esemény független, ha

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \ldots . A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

teljesül tetszőleges $1\le i_1< i_2<\ldots< i_k\le n$ indexsorozatra és minden $2\le k\le n$ számra.

Megjegyzések

- Nem elég a fenti szorzat-tulajdonságot k=2-re megkövetelni. Ha csak ez teljesül: páronkénti függetlenségről beszélünk.
- A szorzat-előállítás segítségével n független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független. (A gyakorlatban ez a tipikus, fontos előfordulása ennek a függetlenségnek.)

További általánosítás

- Végtelen sok eseményt függetlennek nevezünk, ha tetszőlegesen kiválasztva közülük véges sokat, független eseményeket kapunk.
- A szorzat-előállítás segítségével végtelen sok független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ független.

Valószínűségi változók 1.

- A legtöbbször nem maga a kísérlet kimenetele (a realizálódott elemi esemény) hanem egy számszerűsíthető eredmény az érdekes.
- Példa: ipari termelés – minőségellenőrzés: a kérdés az esetleges selejtesek száma, nem pedig az, hogy pontosan melyik elemeket is választottuk.
- Sok gyakorlati esetben nem is adódik természetesen az Ω halmaz (pl. időjárás megfigyelés).

Valószínűségi változók 2.

- Mintavételi példa: N termék, n elemű minta visszatevés nélkül. . Ω elemszáma: $\binom{N}{n}$
- Selejtesek száma (X): 0 és n közötti szám.
- Matematikailag: $X:\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}$ függvény
- Feltétel: legyen értelme pl. annak a valószínűségéről beszélni, hogy $X<a$. Azaz $\{\omega: X(\omega)<a\}\in\mathcal{A}$ kell, hogy teljesüljön minden a–ra. Hasonlóképpen más „természetes" feltételnek is legyen valószínűsége.

Borel halmazok

Definíció. A valós számegyenes Borel halmazai : az a legszűkebb σ-algebra, amely tartalmazza a félegyeneseket (intervallumokat, nyílt halmazokat...). Gyakorlatilag: minden olyan halmaz, amit legfeljebb megszámlálhatóan sok halmazművelettel az intervallumokból elő tudunk állítani.

- Jelölés : $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.
- Definíció: $X:\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}$ függvény ***valószínűségi változó***, ha $\{\omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- Ha $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, akkor minden $\Omega\rightarrow\boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó.

Valószínűségi változók eloszlása

- Mivel a gyakorlati problémáknál Ω nem mindig adható meg egyértelműen, és absztrakt halmazok helyett szívesebben dolgozunk a valós számokkal, a kulcsfogalom a *valószínűségi változók eloszlása*.
- Legyen B tetszőleges Borel halmaz.

  $Q_X(B):=P\{\omega: X(\omega)\in B\}$ valószínűséget ad meg $\boldsymbol{R}$ Borel halmazain. Ez az X *eloszlása*.

Diszkrét valószínűségi változók

- Definíció: az X *diszkrét valószínűségi változó*, ha értékkészlete $(x_1,\ldots, x_n \ldots)$ legfeljebb megszámlálható.
- A valószínűségi változó definíciójából adódóan $\{\omega: X(\omega)= x_i\}=\{X=x_i\}\in\mathcal{A}$ azaz $p_i:=P(X=x_i)$ értelmes. Ezek meg is határozzák X eloszlását.
- Véges vagy megszámlálható valószínűségi mezőn minden valószínűségi változó diszkrét.
- Általában nem célszerű a természetszerűen folytonos értékkészletű X diszkretizálása (egyszerűbbek a folytonos modellek).

Példák

- $X(\omega)=c$ minden ω-ra.

Elnevezés: elfajult eloszlás.

$P(X=c)=1$.

- X akkor 1, ha egy adott, p valószínűségű A esemény bekövetkezik és 0 különben (elnevezés: az *A esemény indikátora*).

  $P(X=0)=1-p$

  $P(X=1)=p$

Példák 2.

- Mintavételnél legyen *X* a mintában levő selejtesek száma.
  - Visszatevéses esetben (binomiális eloszlás):

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\quad (k=0,\dots,n)$$

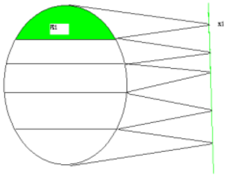
  - Visszatevés nélküli esetben:

(hipergeometriai eloszlás)

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad (k=0,\dots,n)$$

Teljes eseményrendszer

- Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor az $A_i=\{\omega: X(\omega)=x_i\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak.



Valószínűségi változók függetlensége

- *X* és *Y* diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha
  $P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_k\})=P(X=x_i)P(Y=y_k)$
  teljesül minden *i*,*k* értékre. (Azaz az X-hez és az Y-hoz tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek.)
- Megjegyzések:
  - az elfajult eloszlású valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.
  - Önmagától csak az elfajult eloszlású valószínűségi változó független.

Példák

- Függetlenek
  - Visszatevéses mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
    - egymás utáni kockadobások
- Nem függetlenek
  - Visszatevés nélküli mintavételnél az egyes kísérletek eredményei
    - lottóhúzásnál az egymás utáni számok
- Kérdés: Két kockadobás összege független-e ugyanezen két dobás különbségétől?