

Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak

2019/2020 2. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

<http://zempleni.elte.hu>

Visszatevéses mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
- n elemű minta visszatevéssel
- A : pontosan k selejtes van a mintában

$$(k=0, \dots, n) \quad P(A) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

Visszatevés nélküli mintavétel

- N termék, melyből M selejtes
 - n elemű minta visszatevés nélkül
 - A : pontosan k selejtes van a mintában
- ($k=0, \dots, n$)

$$P(A) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mintavétel

A valószínűség további tulajdonságai

A valószínűség végesen is additív:

ha A_1, A_2, \dots, A_n páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Bizonyítás. $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ választással alkalmazzuk a σ -additivitást.

Tehát a korábban belátott tulajdonságok a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre is érvényesek.

Megszámlálható valószínűségi mező

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jelölés: $p_i = P(\omega_i)$, *valószínűségeloszlás*.

$p_i \geq 0$, az összegük 1.

A σ -additivitás miatt tetszőleges A eseményre megy a véges esetre látott számítás:

$$P(A) = P(\cup_{i: \omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

Példa: Hányadikra dobjuk az első fejet egy szabályos érmével? $p_i = 1/2^i$ ($i=1, 2, \dots$)

Geometriai valószínűségi mező

- $\Omega = V$ (az n -dimenziós Euklideszi tér véges térfogatú tartománya)
- \mathcal{A} a tengelyekkel párhuzamos oldalú téglákat:

$$T = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

tartalmazó legszűkebb σ -algebra (elnevezés: Borel-halmazok, tartalmazza pl. az összes nyílt halmazt).

- $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq V$ esetén $P(A) = \lambda(A) / \lambda(V)$, ahol λ az n -dimenziós térfogat.

A valószínűség folytonossága

Állítás. Ha $A_i \in \mathcal{A}$ ($i=1,2,\dots$) és $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$

akkor az $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ jelöléssel $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$

Bizonyítás. $A_1 = A \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$

diszjunkt felbontás, tehát a
 $P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_3) + \dots$

sor konvergens. A fenti felbontást A_n -re alkalmazva:

$$P(A_n) = P(A) + P(A_n \setminus A_{n+1}) + P(A_{n+1} \setminus A_{n+2}) + \dots$$

Események uniójának valószínűsége

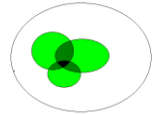
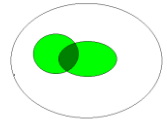
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Példa: Magyar kártyacsomagból kétszer húzunk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy húzunk pirosat?

A : első piros, B : második piros
 $P(A) = P(B) = 1/4$, $P(A \cap B) = 1/16$
 Tehát $P(A \cup B) = 7/16$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Szita (Poincaré) formula

Képlet az általános esetre:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} S_i^{(n)}$$

ahol

$$S_i^{(n)} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i})$$

az i tényezős metszetek valószínűségeinek összege.

Alkalmazások

- Ha az egyes események és metszeteik is egyformán valószínűek, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i)$$

- Átfogalmazás metszetekre:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) =$$

$$= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_i^{(n)}$$

(Megállapodás: $S_0 = 1$.)

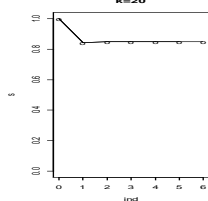
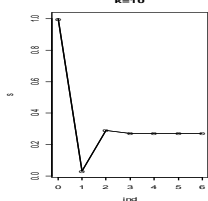
- Példa: Mi a valószínűsége, hogy adott (k) számú kockadobásból minden számot legalább egyszer megkaptunk?

Megoldás

- A_i : az i számot nem dobtuk

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_6) =$$

$$= \sum_{i=0}^6 (-1)^i \binom{6}{i} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i) = \sum_{i=0}^6 (-1)^i \binom{6}{i} \left(\frac{6-i}{6}\right)^k$$



Feltételes valószínűség 1.

- Az A esemény valószínűségét keressük.
- Tudjuk, hogy B esemény bekövetkezett.
- A relatív gyakoriságokkal: csak azokat a kísérleteket nézzük, amelyekben B bekövetkezett. Ezen részsorozatban az A relatív gyakorisága:

$$r_{A|B} / r_B$$

Feltételes valószínűség 2.

- Megfelelője a valószínűségekre:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége (feltétel: $P(B) > 0$).

- Példa: kockadobás. $A = \{\text{páros számot dobunk}\}$
 $B = \{3\text{-nál nagyobbat dobunk}\}$
 $P(A|B) = 2/3$.
- **Monty Hall játék:** melyik ajtót válasszuk? (Kettő mögött kecske, a harmadik mögött autó van.)
- Ugyanez szimulációval: [Monty Hall szimuláció](#)

Teljes eseményrendszer

- **Definíció.** Események A_1, A_2, \dots , sorozata *teljes eseményrendszer*, ha egymást páronként kizárják és egyesítésük Ω .
- Tulajdonság: $P(A_1) + P(A_2) + \dots = 1$
- Legtöbbször véges sok elemből álló teljes eseményrendszereket vizsgálunk.

Teljes valószínűség tétele.

- Legyen B_1, B_2, \dots , pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots$$

- **Bizonyítás.** $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$ diszjunkt tagokra bontás, tehát

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots$$

és $P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$ adja a tételt.

Bayes tétele

Legyen B_1, B_2, \dots , pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A \in \mathcal{A}$ pozitív valószínűségű. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)}$$

(Visszakövetkeztetés az első lépés eredményére.)

Bizonyítás. A nevező éppen $P(A)$ a teljes valószínűség tétele miatt.

A számláló pedig $P(A \cap B_k)$, definíció szerint.

Események függetlensége

- Ha a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A valószínűségét, azaz $P(A|B) = P(A)$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B függetlenek. Ez így nem ideális definíció (nem szimmetrikus, $P(B) > 0$ kell hozzá), ezért
- **Definíció.** Az A és B események *függetlenek*, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Tulajdonságok

- Ha A és B diszjunktak, akkor csak triviális ($P(A) = 0$ vagy $P(B) = 0$) esetben függetlenek.
- Ha A és B függetlenek, akkor komplementereik is függetlenek.
- Önmaguktól csak a triviális események függetlenek.
- $A \subset B$ esetén csak akkor függetlenek, ha legalább az egyik triviális.
- Tipikus eset függetlenségre: A az első, B a második kísérlet eredménye.