

Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematikai elemző BSC-seknek

2019/2020 2. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

<http://zempleni.elte.hu>

Véletlen szám generálás

LCG: $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

$(0 < m, 0 < a < m, 0 \leq c < m, 0 \leq X_0 < m)$

Jól bevált paraméterválasztások:

1. Borland C/C++ $m=2^{32}$, $a=1664525$, $c=1013904223$
2. Delphi, Pascal $m=2^{32}$, $a=134775813$, $c=1$

Véletlen szám generálás inverz módszerrel

Tétel: Legyen X val. vált., F eloszlásfüggvénnyel, amely szigorúan monoton növekedő és folytonos. Ekkor

- i. $F(X)$ egyenletes eloszlású $[0,1]$ -en
- ii. Ha $U \sim U(0,1)$ akkor $F^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F .

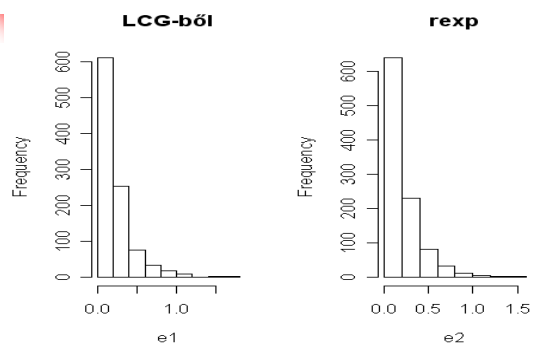
Pl.: Ha $X \sim \exp(\lambda)$ $\rightarrow F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

$\rightarrow F^{-1}(x) = -\ln(1-x) / \lambda$

$\rightarrow -\ln(1-U) / \lambda \sim \exp(\lambda)$

Kiterjesztése: általánosított inverz: $F^{-1}(x) = \inf\{y \mid F(y) \geq x\}$

Exponenciális minta ($\lambda=5$)



Neumann módszer

Legyen $f(x)$ tetszőleges sűrűségfüggvény, $g(x)$ pedig olyan sűrűségfüggvény, amelyre $f(x) < Mg(x)$, valamely $M > 1$ esetén és $g(x)$ -ből könnyen tudunk mintát venni (tipikus példa az egyenletes eloszlás).

Algoritmus:

1. Vegyünk mintát: $u \Rightarrow U(0,1)$ -ből, $x \Rightarrow g(x)$ -ből
2. Ha $u < f(x)/Mg(x)$, akkor x -et elfogadjuk
3. Különben elutasítjuk, és 1-be lépünk.

Normális eloszlású véletlen szám

Box-Müller módszer

- Legyen U, V független, $E[0;1]$ eloszlású. Ekkor

$$\sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V), \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V)$$

két független standard normális eloszlású változó lesz.

Véletlen bolyongás

- $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a bolyongást végző „részecske” helyzete n lépés után. A lépések egymástól függetlenek.

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1-p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

- Tipikusan $p=1/2$ (szimmetrikus bolyongás)
- Példa: X_i az i -dik érmedobásnál a nyereményünk (1 Ft-ot nyerünk, ha fej, 1Ft-ot veszítünk, ha írás), S_n pedig az össznyereményünk n játék után.

Általánosabb modell: Markov láncok

- Legyen $X = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathcal{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó.
- Eddig a független esetet vizsgáltuk. Most eltekintünk ettől.
- $Q_X(k) = P\{\omega: X(\omega) = k\}$ az X eloszlása \mathcal{I}^d elemein. Reális, de a függetlenségnél gyengébb feltételt keresünk.
- Tegyük fel, hogy $P(X_m = k_m)$ valószínűségeket megadásához elegendő az X_{m-1} értéket ismerni. Azaz $P(X_m = k_m | X_i = k_i \text{ minden } 1 \leq i \leq m-1) = P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ (Markov tulajdonság). Azaz a Markov lánc következő értékének eloszlását meghatározza a lánc jelenlegi állapota.

Példák

- Ha az $X = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathcal{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó koordinátái függetlenek, akkor a sorozat Markov lánc.
- Ha $X_n = X_{n-1} + Y_n$ ahol Y_n és X_{n-1} független, akkor X_n Markov lánc.
- További egyszerűsítés: tegyük fel, hogy a $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ átmenetvalószínűségek nem függenek m -től (homogén Markov lánc). Jelölés: $p_{ij} = P(X_m = j | X_{m-1} = i)$ átmenetvalószínűség-mátrix.
- A véletlen bolyongás homogén Markov lánc.
- A hőmérséklet napi értéke feltehetően nem homogén Markov lánc, mert ha ma 10 fok volt, akkor ha nyár van, akkor holnap inkább melegebb lesz, míg télen inkább hidegebb.

Stacionér eloszlás

- Ha megadható olyan π eloszlás az állapotterén, melyre teljesül, hogy $\pi P = \pi$, akkor ezt a Markov lánc stacionér eloszlásának nevezzük. Lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg (általában egyértelmű).
- Ha teljesül, hogy tetszőleges X_0 kiinduló eloszlás esetén az X_n eloszlása konvergál a stacionér eloszláshoz, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc ergodikus.
- Alkalmazások: véletlen szám generálás, függvények közelítése

Félév végi dolgozat

- Canvasban, 120 perc áll rendelkezésre
- május 21, 18 óra, 60 pontos
- konzultáció május 20
- Feladattípusok:
 - Tesztes vagy kifejtős számolós példák -- a többség
 - Definíciók, tételek, bizonyítások, módszerek bemutatása
 - A tananyag átlátását, megértését lemérő kérdések
- Egy minta-dolgozat már fent van a Canvasban (kvizek alatt)
- gyakorolják az eredmények begépelését (nem kell a latex-et tudni, van vizuális képletszerkesztő), nem a szépség a lényeg
- kellene a részletszámítások
- ne ijedjenek meg, a képletek lassan (néha nagyon lassan) töltődnek be