

Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

<http://zempleni.elte.hu>

Függvény várható értéke

- Legyen X sűrűségfüggvénye f és $Y=g(X)$ (g Borel mérhető). Ekkor

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_X(y) dy$$

- Bizonyítás az általános esetre a diszkrét valószínűségi változókra vonatkozó állításból határátmenettel. Spec. ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, $g' > 0$, akkor

$$f_{g(X)}(z) = \frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}$$

és így

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Y(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))} dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) g'(y) \frac{f_X(g^{-1}(g(y)))}{g'(g^{-1}(g(y)))} dy$$

A szórásnégyzet

- Mivel ez a várható értékből származtatott mennyiség, most is érvényes a $D^2(X) := E[(X-E(X))^2]$ definíció, illetve a $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$ számítási módszer. A korábban látott tulajdonságok itt is érvényben maradnak.

Példák

- Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{y^2}{b-a} dy = \left[\frac{y^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

- Ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} y^2 \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[-y^2 e^{-\lambda y} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2y e^{-\lambda y} dy = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

A normális eloszlás szórásnégyzete

- Legyen X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

parciálisan integrálva. Így $D^2(X) = 1$. Ebből az (m, σ) paraméterű normális eloszlás szórásnégyzete: $D^2(\sigma X + m) = \sigma^2$.

Momentumok

- X m-edik momentuma $E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} y^m f_X(y) dy$
- X m-edik centrális momentuma

$$E(X - EX)^m = \int_{-\infty}^{\infty} (y - EX)^m f_X(y) dy$$

- Tulajdonság: ha az eloszlás szimmetrikus a 0-ra, akkor a páratlan rendű momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Következmény: ha az eloszlás szimmetrikus, akkor a páratlan rendű centrális momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.
- Ha az m-edik momentum véges, akkor a $k < m$ -edik is.

Valószínűségi vektorváltozók

- Emlékeztető: $X=(X_1, X_2, \dots, X_d): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ függvény valószínűségi vektorváltozó, ha $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B d -dimenziós Borel halmazra. (Pontosan akkor teljesül, ha X_i valószínűségi változó minden $1 \leq i \leq d$ -re.)
- $Q_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\}$ az X eloszlása \mathbf{R}^d Borel-halmazain.
- Ennek megadásához elegendő a $F_X(z) = P(X < z)$ valószínűségeket megadni ($z \in \mathbf{R}^d$), a $<$ reláció koordinátánként értendő, azaz $X < z$ pontosan akkor teljesül, ha $X_i < z_i$ minden $1 \leq i \leq d$ -re. Ezek meghatározzák $Q_X(B)$ értékét tetszőleges B -re (nem bizonyítjuk).

Együttes eloszlásfüggvény

- Az $F_X(z) := P(X < z)$ $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ függvény az X valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye.
- Az egydimenziós esettel analóg tulajdonságai:
 - $0 \leq F_X(z) \leq 1$
 - $F_X(z)$ minden koordinátájában monoton növekvő
 - $\lim_{z_i \rightarrow \infty} F_X(z) = 1$, ha z minden koordinátájára $z_i \rightarrow \infty$
 - $\lim_{z_i \rightarrow -\infty} F_X(z) = 0$ ha z legalább egy koordinátájára $z_i \rightarrow -\infty$
 - $F_X(z)$ minden koordinátájában balról folytonos.

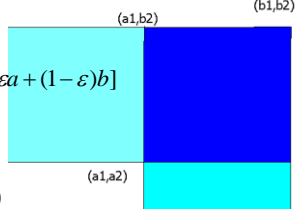
Téglatestek valószínűségei

- $P(a \leq X < b) \geq 0$ minden $a < b \in \mathbf{R}^d$ -re. Ez kifejezhető az X eloszlásfüggvényével:
- $d=2$ -re: $P(a \leq X < b) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$.
- Általánosan:

$$P(a \leq X < b) = \sum_{i=0}^d \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^d \\ \sum \varepsilon_j = i}} (-1)^i F[\varepsilon a + (1-\varepsilon)b]$$

ahol

$$\varepsilon a = (\varepsilon_1 a_1, \varepsilon_2 a_2, \dots, \varepsilon_d a_d)$$



Bizonyítás

- Legyen $A_i := \{X_i < a_i\}$ és $B := \{X < b\}$. Ezekkel az eseményekkel $P(a \leq X < b) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_d \cap B)$
- $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_d \cap B) = P(B) - P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d) \cap B)$
- ahol $P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d) \cap B) = \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} S_i^{n(d)}$
- $S_i^{n(d)} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq d} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i} \cap B) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^d \\ \sum \varepsilon_j = i}} F[\varepsilon a + (1-\varepsilon)b]$
- mivel $P(B) = F(\varepsilon a + (1-\varepsilon)b)$ az $\varepsilon = (0, 0, \dots, 0)$ vektorral, éppen a tételben szereplő formulát kaptuk.

Az eloszlásfüggvény további tulajdonságai

- Tetszőleges, a felsorolt összes tulajdonsággal rendelkező F -hez létezik X d -dimenziós vektorváltozó, aminek F az eloszlásfüggvénye.
- Legyen $k = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i\}$ az $\{1, \dots, d\}$ részhalmaza. Ekkor ha $z_i \rightarrow \infty$ pontosan az $\{1, \dots, d\} \setminus k$ -beli koordinátákra, akkor $\lim F_X(z) = F_{X^*}(z^*)$ ahol $z^* \in \mathbf{R}^i$ pontosan a z k -beli koordinátáiból áll. X^* is i -dimenziós valószínűségi változó, elnevezés: az X peremeloszlása.
- Spec.: $d=2, i=1: \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$
 $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

Sűrűségfüggvény

- Ha létezik $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(t) dt$$
 akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f sűrűségfüggvénnyel. Az integrál most d -dimenziós, értelmezése:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \dots \int_{-\infty}^{z_d} f(t_1, t_2, \dots, t_d) dt_d \dots dt_2 dt_1$$

A peremeloszlások sűrűségfüggvénye

- Legyen $d=2$. Ha (X,Y) abszolút folytonos, $f(x,y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor X sűrűségfüggvénye

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

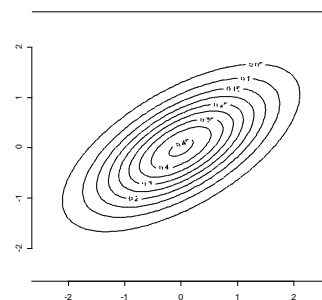
- Bizonyítás.

$$\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = F_{X,Y}(z, \infty) = P(X < z)$$

- Ugyanígy Y sűrűségfüggvénye

$$h_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

0.5 korrelációjú, standard normális eloszlású változók együttes sűrűségfüggvényének kontúrjai



Példák, megjegyzések

- Az egységnégyzeten egyenletes eloszlásra a peremeloszlások is egyenletesek a $[0,1]$ intervallumon.
- Tetszőleges (mérhető) T tartományra a $P(X \in T)$ valószínűség az f együttes sűrűségfüggvény T tartományon vett integráljaként számolható.
- Következmény: nem abszolút folytonos az az (X,Y) vektorváltozó, amelynél 0 területű tartomány valószínűsége pozitív.

Valószínűségi változók függetlensége (ismétlés)

- n eseményrendszer független, ha

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

teljesül tetszőleges

$A_{i_1} \in \mathcal{A}_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{A}_{i_2}, \dots, A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$ eseményekre, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ indexsorozatra és minden $2 \leq k \leq n$ számra.

Def. Az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók függetlenek, ha az előző tulajdonság teljesül

$$A_{i_j} = \{\omega : X_{i_j}(\omega) \in B_{i_j}\}$$

választással (ez matematikailag azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_{X_1}, \mathcal{F}_{X_2}, \dots, \mathcal{F}_{X_n}$ generált σ -algebrák függetlenek).

A függetlenség karakterizációi

- Ha X koordinátái függetlenek, akkor definíció szerint
- $F_X(z) = P(X_1 < z_1, X_2 < z_2, \dots, X_d < z_d) = F_1(z_1)F_2(z_2) \dots F_d(z_d)$ (minden $z \in \mathbf{R}^d$ -re). Meg is fordítható: F szorzatelőállításából következik a függetlenség.
- Deriválva: a függetlenség abszolút folytonos változókra ekvivalens a sűrűségfüggvény $f_X(z) = f_1(z_1)f_2(z_2) \dots f_d(z_d)$ alakú előállításával is.
- Példa: az egységnégyzeten egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye ($f(z)=1$ ha $0 < z < 1$) előáll $f_1(z_1)f_2(z_2)$ alakban, ahol $f_i(z_i)=1$, ha $0 < z_i < 1$ ($i=1,2$), ez éppen a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás.