Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 1. félév
Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

Szemléletes bevezetés

- Ha úgy közelítjük az abszolút folytonos eloszlást (pl. az év egy adott napján 12 órakor Bp-en a hőmérséklet), hogy egyre pontosabb eszközökkel mérjük meg, akkor $P(z<X<z+\delta)/\delta \approx f(z)$, azaz a valószínűségekből határátmenettel adódik a sűrűségfüggvény.

Standard normális eloszlás

- A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Valóban sűrűségfüggvény, mert f>0 és

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}dxdy=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}d\varphi dr=\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=1$$

a polárkoordinátás helyettesítésből

g(X) eloszlása

- Legyen g: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ (mérhető) függvény. Ekkor g(X) is valószínűségi változó.
- Abból, hogy X eloszlása abszolút folytonos, nem következik még g(X) eloszlásának folytonossága sem: pl. g(x)=c esetén g(X) elfajult eloszlású.

Példák

$F_{aX+b}(z) = F_X((z-b)/a)$, ha a>0 és
$F_{aX+b}(z) = 1-F_X((z-b)/a)$, ha a<0.
Ebből adódik, hogy ha X abszolút folytonos, és g(z)=az+b, akkor g(X) sűrűségfüggvénye
$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$.
Általános eredmény: ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, $g'\neq 0$, akkor

$$f_{g(X)}(z)=\frac{f_X(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|}$$

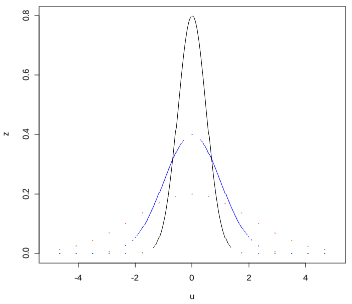
A normális eloszlás

- Legyen m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám. Ha X standard normális eloszlású, akkor az $Y=\sigma X+m$ valószínűségi változó (m,σ) paraméterű normális eloszlású. Ennek sűrűségfüggvénye az

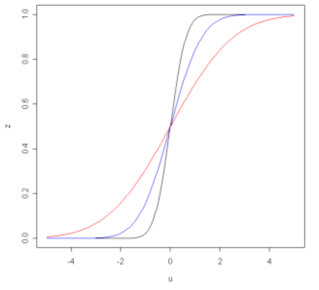
$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$ képletből

$$f_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Normális eloszlások sűrűségfüggvénye (m=0)



0 várható értékű normális eloszlások eloszlásfüggvénye



Abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók várható értéke

- Az előzőekben látott határátmenet segítségével (egyre finomabb felosztással közelítjük a folytonos eloszlást)
  $E(X)=\Sigma zP(z<X<z+\delta)\approx\Sigma z\delta f(z)\approx\int zf(z)dz$
- Ebből a definíció: az abszolút folytonos eloszlású X várható értéke: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)dy$
  ha az integrál létezik.

Tulajdonságok, példák

- Mivel a diszkrét esetből határátmenettel kaptuk a fogalmat, a tulajdonságok (pl. E(aX+b)=aE(X)+b, E(X+Y)=E(X)+E(Y) stb.) most is érvényben maradnak.
- Ha X egyenletes eloszlású az [a,b]-ben, akkor

$$E(X)=\int_a^b \frac{y}{b-a}dy=\left[\frac{y^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

További példák

- Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor

$$E(X)=\int_0^\infty \lambda y e^{-\lambda y}dy=\left[-ye^{-\lambda y}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{\lambda}$$

- Ha X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

- Ha a Z változó Q_Z eloszlása keverék-eloszlás (azaz pl. p valószínűséggel X-et, 1-p valószínűséggel Y-t figyeljük meg), akkor E(Z)=pE(X)+(1-p)E(Y).

További eloszlások

- Gamma eloszlás, sűrűségfüggvénye a pozitív x értékekre: $\frac{\lambda(\lambda x)^{h-1}}{(h-1)!}e^{-\lambda x}$.
  (h∈N, λ>0 paraméterek)
- Lognormális eloszlás, sűrűségfüggvénye

$$f_X(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

- Cauchy eloszlás, sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- Néhány nevezetes eloszlás