Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András
zempleni@caesar.elte.hu
http://zempleni.elte.hu

Konvolúció

- Független valószínűségi változók összegének eloszlása
- Most: nemnegatív, egész értékű esetre.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

- Példák: X, Y függetlenek, binomiális eloszlásúak (n,p), ill. (m,p) paraméterekkel. Ekkor

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}=$$
$$=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$$

Példák

- Azaz X+Y is binomiális (n+m,p) paraméterekkel. Spec.: X= X_1+ X_2+… +X_n, ahol X_i p paraméterű indikátorváltozó, a tagok függetlenek is. Ebből is kijön, hogy E(X)=np, D^2(X)=np(1-p).
- Példa 2: X, Y függetlenek, Poisson eloszlásúak λ, ill. μ paraméterekkel. Ekkor X+Y is Poisson, $\lambda+\mu$ paraméterrel.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{-\mu}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\mu^{k-i}k!}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}(\mu+\lambda)^k$$

Negatív binomiális eloszlás

- Legyen X= X_1+ X_2+… +X_r , ahol X_i p paraméterű Pascal eloszlású változó, függetlenek. Ekkor X eloszlása:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

ha k≥r (különben 0). Elnevezés: r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. Ez éppen annak a kísérletnek a sorszáma, ahol az r-edik sikeres jön ki. Ez bizonyítja is a képlet helyességét (formálisan is meg lehet kapni a konvolúciós képletből indukcióval).
A negatív binomiális eloszlás

Valószínűségi változók általános fogalma (ismétlés)

- $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó, ha {ω: X(ω)∈B}∈$\mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.
- Q_X(B):=P{ω: X(ω)∈B} az *X eloszlása.*
- Ennek megadásához elegendő a félegyenesek valószínűségeit megadni: $F_X(z)$:=P(X<z) meghatározza Q_X(B) értékét tetszőleges B-re (nem bizonyítjuk).

Az eloszlásfüggvény

- Az $F_X(z)$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.
- Tulajdonságai:
  - $0\le F_X(z)\le 1$
  - $F_X(z)$ monoton növő
  - $\lim_{z\to\infty} F_X(z)=1$, $\lim_{z\to-\infty} F_X(z)=0$
  - $F_X(z)$ balról folytonos.
- Bizonyítás: Az első kettő triviális, az utolsó kettőhöz a valószínűség folytonossága kell:
Ha $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots$ akkor $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$
ahol $$A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

Bizonyítás

- Az A_n= (-∞,-n) választással alkalmazva a folytonosságot a Q_X valószínűségre adódik a 3. tulajdonság második fele.
- A folytonosságot a komplementerekre alkalmazva kapjuk, hogy ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ és

  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ amit

  A_n= (-∞,n) választással alkalmazva éppen a 3. tulajdonság első felét kapjuk.
- Végül a 4. tulajdonsághoz A_n= (-∞,x-1/n) a jó választás, ekkor A= (-∞,x).

Példák

- Tetszőleges 1-4 tulajdonságú F-hez létezik X, aminek F az eloszlásfügvénye (pl. Ω=***R*** , P([a,b))=F(b)-F(a), X az identitásfüggvény
- A c pontban elfajult eloszlás eloszlásfüggvénye $F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le c \\ 1, \text{ha } z > c \end{cases}$
- Az indikátorváltozó eloszlásfüggvénye $F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1-p, \text{ha } 0 < z \le 1 \\ 1, \text{ha } z > 1 \end{cases}$

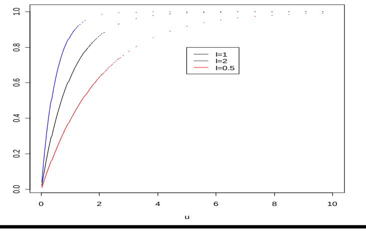
Folytonos eloszlások

- Definíció. X folytonos eloszlású, ha eloszlásfüggvénye folytonos.
- Példa: egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{z-a}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 1, \text{ha } z > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, \text{ha } 0 < z \end{cases}$ ahol λ>0 paraméter



Valószínűségek kiszámítása

- P(a≤X<b)=F(b)-F(a)
- P(X=a)= F(a+0)-F(a), azaz ha F folytonos, minden egyes pont 0 valószínűségű.
- P(a<X<b)=F(b)-F(a+0)
- P(a≤X≤b)=F(b+0)-F(a)

Abszolút folytonos eloszlások

- Ha létezik f, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

  akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f ***sűrűségfüggvénnyel***.
- f tulajdonságai: f≥0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

- Ez elég is: minden ilyen f integrálfüggvénye eloszlásfüggvény.

Példák

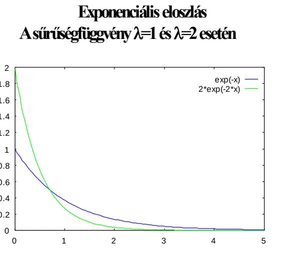
- Egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon

$$f(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 0, \text{ha } z > b \end{cases}$$

- Exponenciális eloszlás

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ha } t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, \text{ha } 0 < t \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás



A sűrűségfüggvény tulajdonságai

- Létezéséhez szükséges, hogy F folytonos legyen.
- Ha F abszolút folytonos, akor F'=f, ahol F deriválható.
- f nem egyértelmű (pl. véges sok pontban tetszőleges értéket adhatunk neki), ezért a legegyszerűbb, szakaszonként folytonos változatot választjuk.
- Szemléletes jelentése:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt \approx f(a)(b-a)$$

azaz rövid intervallumokra a valószínűség közelíthető a sűrűségfüggvény értékének és az intervallum hosszának a szorzatával.