Valószínűségszámítás előadás informatika BSC/A szakosoknak és matematika BSC-seknek

2019/2020 1. félév

Zempléni András

zempleni@caesar.elte.hu

http://zempleni.elte.hu

Binomiális eloszlás alkalmazása

- Visszatevéses mintavétel más realizációja: független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, végezzünk n (rögzített számú) független kísérletet.
- X: az A bekövetkezésének gyakorisága (pontosan hányszor jött ki az A). X eloszlása binomiális (n,p).
- $X= X_1 + X_2 \dots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora. Ezek az indikátorok függetlenek is!

Geometriai (Pascal) eloszlás

- Független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, addig végzünk kísérletet, míg A be nem következik.
- X: az első sikeres kísérlet sorszáma.

$p_k=P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ (k=1,2,…)

Valóban valószínűségeloszlás ($p_1+p_2+\dots=1$)

geometriai eloszlás

Poisson eloszlás

$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ (k=0,1,2,…; $\lambda>0$ paraméter). Valóban eloszlás. Grafikusan

Állítás. Ha a binomiális eloszlás paramétereire $n\to\infty$ úgy, hogy $np\to\lambda$,
akkor a határérték éppen a λ paraméterű Poisson eloszlás.

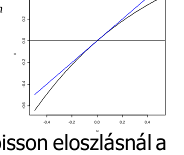
Bizonyítás. $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Alkalmazások

- Első példa: lórugás áldozatainak száma a porosz hadseregben.
- Poisson folyamat: időben lejátszódó folyamatnál adott $[a,b)$ intervallumba eső események száma ($X_{a,b}$) éppen $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlású, ha a folyamat
  - homogén: $X_{a,a+t}$ eloszlása csak t-től függ;
  - utóhatás nélküli: $X_{a,b}$ és $X_{b,c}$ függetlenek ha $a<b<c$;
  - nemelfajuló: $0<P(X_{a,b}=0)<1$.

Bizonyítás-vázlat

- Legyen $p_t := P(X_{0,t}=0)$. A homogenitás és a függetlenség miatt $p_1 = p_{1/n}^n$ illetve
$$p_t = p_1^t = e^{-\lambda t}$$
- Annak a valószínűsége, hogy egy t hosszúságú intervallumon pontosan k esemény következik be, közelíthető a $\binom{n}{k}(1-e^{-\lambda t/n})^k e^{-\lambda t(n-k)/n}$ kifejezéssel, ami az előzőek és
$$n(1-e^{-\lambda t/n})\to\lambda t$$



miatt éppen a $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlásnál a $P(X=k)$ valószínűség.

Gyakorlati alkalmazások

- Balesetek száma
- Viharok száma
- Rendszer meghibásodásainak száma

Tulajdonság: ha kétféle esemény következhet be a folyamat során, akkor külön-külön az egyes események száma is Poisson folyamatot alkot.

Összefoglalás (diszkrét eloszlások)

- Binomiális eloszlás
  - Rögzített számú kísérletnél adott esemény gyakorisága (pl. 10 kockadobásból a hatosok száma)
  - Nagy mintaelemszámra, kicsi valószínűségnél a Poisson eloszlással közelíthető
- Pascal eloszlás
  - Addig kísérletezünk, míg egy adott esemény be nem következik, az első sikeres sorszáma (pl. az első hatost hányadik kockadobásnál kapjuk meg)
- Hipergeometriai eloszlás
  - Visszatevés nélküli mintavételnél adott típusú mintaelemek száma (pl. lottóhúzásnál az 5 találat valószínűsége)

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejátékban a pontos nyeremény nem látható előre. De: az átlagos nyereményről szeretnénk tudni. (Kedvező-e a játék? Fair játék: az ár éppen a várható érték.)
- Példa: Dobókocka: annyi a nyereményünk, amennyit dobunk. Ennek átlagos értéke 1/6(1+2+…+6)=21/6=3.5
- De ha nem szabályos a kocka, például az egyes helyett is 6 van, akkor az átlagos nyeremény 1/6(2+…+5)+6/3=13/3.
- *Definíció.* A $p_i = P(X = x_i)$ eloszlással megadott valószínűségi változó *várható értéke* E(X):= $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots$, ha a sor abszolút konvergens.

Példák

- Az elfajult eloszlás várható értéke:

$E(X)=cP(X=c)=c$.
- A p valószínűségű A esemény indikátorának várható értéke: $E(X)=1P(X=1)= p$
- Az $x_1, x_2,\ldots x_n$ számokon egyenletes eloszlás (mindegyik valószínűsége 1/n) várható értéke a számok számtani közepe.
- Az (n,p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$$

- Amerikai rulett. Ha k számra teszünk, a nyereményünk 36/k. A várható nettó nyeremény (36/k)· (k/38)-1= - 2/38.

Példák 2.

A hipergeometriai eloszlás várható értéke

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\sum_{k=1}^{n} n\frac{M}{N}\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\frac{M}{N}$$

A Poisson eloszlás várható értéke

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda$$

Tulajdonságok

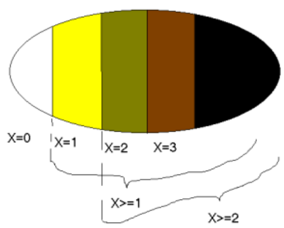
- Nem minden valószínűségi változónak van véges várható értéke:

$P(X=2^k)=(1/2)^k$ $k=1,2,\ldots$

esetén $E(X)=1+1+1+1+\ldots=\infty$.
- Azaz annak a játéknak az „ára", ahol 2^k Ft-ot kapunk, ha szabályos érmével k-adikra dobunk először fejet: végtelen. Ez a Szt.Pétervári paradoxon; gyakorlatban persze nem reális így ez a játék, hiszen nincs az a bank, amely korlátlan pénzt tudna fizetni.
- Ha E(X) véges, akkor az abszolút konvergencia miatt egyértelmű is.

Tulajdonságok 2.

- Ha $X \geq 0$ és $E(X)$ véges, akkor $E(X) \geq 0$.
- Ha $E(X)$ véges, akkor $E(aX+b) = aE(X)+b$ (a várható érték lineáris).
- Ha X nemnegatív egész értékű, akkor $E(X) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \ldots$



Alkalmazás: a Pascal eloszlás várható értéke

- $P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$, így
- $E(X) = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots = 1/p$.
- Természetes eredmény: átlagosan a hatodik dobásra kapjuk az első hatost.
- Tulajdonság: a Pascal eloszlás örökifjú

$$P(X > k + l \mid X > l) = P(X > k)$$

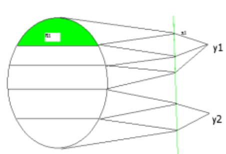
(k,l tetszőleges természetes számok).

Függvény várható értéke

- Legyen g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ függvény, X diszkrét valószínűségi változó, $p_i = P(X = x_i)$. Ekkor g(X) is valószínűségi változó, a várható értéke E(g(X)) az eredeti X változó eloszlásából is kiszámolható:

  E(g (X)) $= p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) +$

Bizonyítás. A definíció szerint E(g (X))= $q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots$ ahol $q_i = P(g(X) = y_i)$. $y_i = g(x_j)$ valamely j-re, így az X változóhoz tartozó teljes eseményrendszer elemei szerint összegezhetünk és így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.



Példák

- Ha g(X)=c, akkor E(g (X)) $= p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) + \ldots = c(p_1 + p_2 + \ldots) = c$.
- A kockadobás négyzetének várható értéke: (1+4+9+...+36)/6=91/6.
- Legyen X binomiális eloszlású. E(1/(X+1))=

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n+1-(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)p}\left(1-(1-p)^{n+1}\right)$$

Valószínűségi vektorváltozók

- Gyakran nem csak egy mennyiséget vizsgálunk a kísérletünk/megfigyelésünk során.
- Példa: hőmérséklet, csapadék, szélerő stb.
- $\underline{X} : \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ függvény valószínűségi vektorváltozó, ha $\{\omega : \underline{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B n-dimenziós Borel halmazra.
- $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ pontosan akkor valószínűségi vektorváltozó, ha a koordinátái valószínűségi változók.

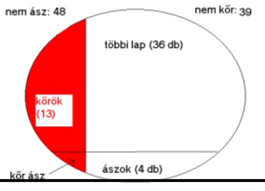
Vektorváltozók eloszlása

- Legyen B tetszőleges n-dimenziós Borel halmaz.

  $Q_{\underline{X}}(B) := P\{\omega : \underline{X}(\omega) \in B\}$ valószínűséget ad meg $\boldsymbol{R}^n$ Borel halmazain. Ez az $\underline{X}$ *eloszlása*.
- Speciális eset: ha diszkrét, akkor a $p_i := P(\underline{X} = \underline{x}_i)$ valószínűségek meg is határozzák $\underline{X}$ eloszlását.
- A kétdimenziós esetben a diszkrét valószínűségi változó eloszlása legegyszerűbben táblázattal adható meg:

Példa: kétszer húzunk visszatevéssel egy francia kártyacsomagból

kőr\ ász	0	1	2
0	$(36/52)^2$	$2\cdot3\cdot36/(52)^2$	$(3/52)^2$
1	$2\cdot12\cdot36/(52)^2$	$2\cdot(12\cdot3+1\cdot36)/(52)^2$	$2\cdot3/(52)^2$
2	$(12/52)^2$	$2\cdot12/(52)^2$	$(1/52)^2$

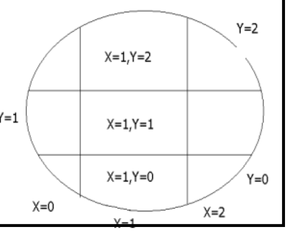


A peremeloszlások

- (X,Y) eloszlásából (elnevezés: *együttes eloszlás*) következtethetünk az egyes változók eloszlására:

$P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)$

- Az egyes koordináták (alacsonyabb dimenziós vektorok) eloszlása: *peremeloszlás*.
- Az együttes eloszlás tehát meghatározza a peremeloszlást (a megfordítás természetesen nem igaz) .



Kapcsolat az együttes- és a peremeloszlás között

- A peremeloszlások viszont nem határozzák meg az együttest: (tetsz. $|a|<1/4$-re $P(X=1)=P(X=-1)=1/2$ $P(Y=1)=P(Y=-1)=1/2$)
- Kivétel: ha a komponensek függetlenek